



Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Azcapotzalco

Simulación de Pruebas de Trazadores mediante Formulaciones Integrales

Maestría en Ingeniería de Procesos

Ing. Delia Rivera Ugalde

m.02.22/12/2014

Director interno:

Dra. Margarita M. González

Departamento de Energía, UAM-A

Director externo:

Dr. Eliseo Hernández Martínez

Facultad de Ciencias Químicas, UV



Resumen

En este trabajo se propone el uso de esquemas numéricos basados en las formulaciones de ecuaciones integrales (FEI) para la simulación de modelos de pruebas de trazadores. Las formulaciones integrales son generadas a partir de la inversión analítica de los operadores diferenciales que describen las pruebas de trazadores, lo cual conduce a esquemas numéricos con mejores propiedades numéricas que los esquemas tradicionales. Además, dada la estructura matemática de las FEI, es posible identificar las contribuciones individuales de las interacciones individuales del sistema reacción-transporte, esto es, por separado a los fenómenos de transporte, las reacciones químicas, las condiciones de frontera y los efectos de acumulación dinámica. Para ilustrar las ventajas de las FEI, se consideran dos casos de estudio generales de modelos de pruebas de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados, donde intervienen interacciones de tipo reacción-difusión y reacción-difusión-convección. Los resultados obtenidos indican que los esquemas numéricos basados en las FEI son sistemáticos y de fácil aplicación en los modelos de pruebas de trazadores, mejoran las aproximaciones numéricas hasta 4 órdenes de magnitud comparados con los esquemas de DF y reducen los tiempos de cómputo significativamente.

Agradecimientos

A mi padre Dios.

A mi esposo: Oscar.

A mis hijos: Sara, Fátima, Alberto.

A mis padres: Josefina y Jorge; y hermanos: Jorge, Susana y Marina

A mis amigos y compañeros de esta aventura llamada maestría:

Ángel, Ana, Adrián, Martha, Gastón y Oscar.

Y muy especialmente a mi asesor el Doctor Eliseo Hernández Martínez por su enorme apoyo.

A todos ustedes, siéntanse parte de este logro.

Índice General

CAPÍTULO 1	INTRODUCCIÓN.....	8
1.1	MOTIVACIÓN.....	8
1.2	ANTECEDENTES.....	10
1.3	HIPÓTESIS	14
1.4	OBJETIVOS	15
1.4.1	Objetivo General.....	15
1.4.2	Objetivos Particulares.....	15
CAPÍTULO 2	MARCO TEÓRICO	16
2.1	INDUSTRIA DEL PETRÓLEO.....	16
2.2	YACIMIENTOS PETROLEROS.....	16
2.2.1	Yacimientos petroleros en México	18
2.3	RECUPERACIÓN DE HIDROCARBUROS	20
2.4	PRUEBA DE TRAZADORES	22
2.4.1	Trazador: tipos y características	22
2.5	MODELOS PARA PRUEBAS DE TRAZADORES	23
2.6	SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS PRUEBAS DE TRAZADORES	27
2.6.1	Diferencias finitas.....	27
2.6.2	Colocación Ortogonal.....	28
2.6.3	Formulación integral.....	29
CAPÍTULO 3	MODELOS DE PRUEBAS DE TRAZADORES	31
3.1	DESCRIPCIÓN FÍSICA	31
3.2	DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA	32
3.3	FORMULACIÓN PARA EL MODELO DE PRUEBA DE TRAZADORES.....	36
3.3.1	Sistema reacción-difusión-convección	36
3.3.2	Función de Green para el sistema reacción-difusión-convección.....	38
3.3.3	Sistema reacción-difusión.....	41
CAPÍTULO 4	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	45
4.1	SISTEMA REACCIÓN-DIFUSIÓN: MATRIZ POROSA.....	45
4.2	SISTEMA REACCIÓN-DIFUSIÓN-CONVECCIÓN: FRACTURA	52
4.3	PRUEBA DE TRAZADORES: TRES ETAPAS	57
4.3.1	Etapa 1: Inyección constante	58
4.3.2	Etapa 2: Inyección constante	59
4.3.3	Etapa 3: Inyección constante	61
4.3.4	Etapa 1: Inyección variable	64
4.3.5	Etapa 2: Inyección variable	65
4.3.6	Etapa 3: Inyección variable	67
REFERENCIAS	70

Índice de Figuras

Figura 2-1. Esquema de las aplicaciones más relevantes de las aplicaciones industriales del petróleo.....	17
Figura 2-2. Esquema de la localización de un yacimiento petrolero	17
Figura 2-3. Etapas de la extracción del hidrocarburo.....	18
Figura 2-4. Pozo de inyección en el que se observa a) la inyección del trazador KIS y su esparcimiento junto con el CO ₂ b) productos de reacción en la salmuera.	24
Figura 3-1. Representación gráfica del yacimiento para la prueba de trazador.	31
Figura 3-2. Propagación espacial de la función de Green a diferentes valores de la velocidad del fluido, a) $v_f=0$, b) $v_f=1.0$, $v_f=10$ y d) $v_f=100$	40
Figura 3-3. Representación de la función de Green para el sistema reacción difusión.....	44
Figura 4-1. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la matriz porosa, a) $k=0$, b) $k=0.01$, c) $k=0.1$ y d) $k=1.0$ h ⁻¹	46
Figura 4-2. Perfil de concentración sobre el dominio de la matriz porosa a $t=20$ h de simulación.....	47
Figura 4-3. Error relativo calculado para diferentes nodos de la formulación integral y diferencias finitas, a) $k=0$, b) $k=0.01$, $k=0.1$ y d) $k=1.0$	48
Figura 4-4. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la matriz porosa con dos condiciones de frontera para a) $k=0$, b) $k=0.01$, $k=0.1$ y d) $k=1.0$ h ⁻¹	49
Figura 4-5. Dinámica del trazador en la matriz porosa para inyección constante hasta $t=20$ h.	50
Figura 4-6. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la matriz porosa con condición de frontera variable para a) $k=0$, b) $k=0.01$, $k=0.1$ y d) $k=1.0$ h ⁻¹	51
Figura 4-7. Dinámica	51
Figura 4-8. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la fractura con variación de a) velocidad de inyección y b) cinética de reacción.	52
Figura 4-9. Perfil de concentración de la fractura como función de la posición en $t=20$ h.	53
Figura 4-10. Error relativo calculado para el modelo de la fractura usando diferentes nodos de la formulación integral y diferencias finitas, a) $v=0$, b) $v=0.1$, $v=0.5$ y d) $v=1.0$	54
Figura 4-11. Error relativo calculado para el modelo de la fractura usando diferentes nodos de la formulación integral y diferencias finitas, a) $k=0$, b) $k=0.01$, $k=0.1$ y d) $k=1.0$	55
Figura 4-12. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la fractura con inyección constante para a) $v=0$, b) $v=0.1$, $v=0.5$ y d) $v=1.0$ m/h	56
Figura 4-13. Dinámica del trazador en la fractura en $x=0.5$	56

Figura 4-14. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la fractura con inyección constante para a) $v=0$, b) $v=0.1$, $v=0.5$ y d) $v=1.0\text{m/h}$	57
Figura 4-15. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la primera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección constante.....	58
Figura 4-16. Perfil de concentración de la primera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000\text{h}$	59
Figura 4-17. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la segunda etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección constante.	60
Figura 4-18. Perfil de concentración de la segunda etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000\text{h}$	61
Figura 4-19. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la tercera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección constante.....	62
Figura 4-20. Perfil de concentración de la tercera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000\text{h}$	63
Figura 4-21. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la primera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección variable.	64
Figura 4-22. Perfil de concentración de la primera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000\text{h}$	65
Figura 4-23. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la segunda etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección variable.	66
Figura 4-24. Perfil de concentración de la segunda etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000\text{h}$	67
Figura 4-25. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la tercera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección variable.	68
Figura 4-26. Perfil de concentración de la tercera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000\text{h}$	69

Índice de Tablas

Tabla 2-1. Descripción de los 11 campos del complejo Cantarell.....	18
Tabla 3-1. Parámetros del modelo con sus valores y unidades.....	36

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

Recientes estudios reportan que la producción del petróleo llegará a un punto máximo y después caerá súbitamente. Aunque aún se desconoce en qué momento sucederá esta caída, los geólogos estiman que ocurrirá en 5 o 10 años aproximadamente. Esto ha preocupado a todos los sectores sociales, debido a que la población mundial depende del petróleo como principal fuente de energía, pues todo indica que las consecuencias de la caída en la producción del petróleo podrían generar conflictos entre naciones, a menos que se planifique de inmediato la producción de fuentes alternas de energía (Hughes y Rudolph, 2011). Aún más, la población del mundo va en aumento y con ello en consumo energético, por ejemplo países como China e India, donde se prevé que la demanda aumentará hasta un 50% para el año 2030, alcanzando una necesidad de importación de nueve millones de barriles por día (Tsoskounoglou, 2008). Esta situación refleja la necesidad en la generación de tecnología que permita el óptimo aprovechamiento de los recursos petroleros, considerando el ciclo completo de producción, desde la localización de los yacimientos hasta su procesamiento.

Una de las etapas de mayor importancia es la extracción del hidrocarburo de los yacimientos petroleros. Esta etapa consiste a su vez de tres fases denominadas primaria, secundaria y terciaria. En la recuperación primaria el aceite fluye hacia el exterior aprovechando la diferencia de presiones que hay entre el interior del yacimiento y la presión del exterior. En la secundaria se inyecta un fluido al seno del yacimiento, (agua por lo general) de modo que mantenga la presión al interior y pueda continuarse la extracción. Finalmente, en la recuperación terciaria o mejorada consiste en inyectar químicos, gases o

utilizar algunos métodos térmicos como inyección de agua caliente, vapor o combustión *in situ* (Ramirez-Sabag, 2008)

En general, las pruebas de trazadores consisten en inyectar fluidos característicos (líquidos o gaseosos) en los yacimientos petroleros con el propósito de identificar los remanentes de hidrocarburo y su distribución en los yacimientos. Así mismo, provee información de la conectividad entre los pozos petroleros y las posibles rutas de transporte. A pesar de que las pruebas de trazadores son importantes para el análisis de yacimientos petroleros, su aplicación práctica es costosa y no siempre son obtenidos los resultados deseados. Debido a esta situación se han propuesto alternativas de análisis, entre los que se encuentran el uso de modelos matemáticos que permiten predecir el comportamiento del trazador en el yacimiento petrolero. Los modelos matemáticos de las pruebas de trazadores generalmente son formulados con ecuaciones de tipo reacción-transporte, donde se incluyen términos convectivos-dispersivos acoplados a reacciones químicas. Tales ecuaciones son descritas por sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Para condiciones donde solo intervienen fenómenos de transporte, y bajo consideraciones de homogeneidad y parámetros constantes, se han reportado metodologías para la determinación de soluciones analíticas (Datta-Gupta y King; 1995; Reimus et al., 2003; Seifert y Engesgaard, 2007; Coronado y Ramirez-Sabag, 2008; Coronado et al., 2011; 2012; Wang y Zhan, 2015; Zhu et al., 2016). Sin embargo, cuando los parámetros de transporte no son constantes (anisotropía) o hay presencia de reacciones químicas, no es posible determinar las soluciones analíticas. En dichos casos, para el análisis de los modelos de pruebas de trazadores es necesario el uso de esquemas numéricos. Existen una gran cantidad de métodos de aproximación numérica para la solución de modelos de pruebas de trazadores, tales como, diferencias finitas, elemento finito, colocación, entre otros (Arbogast y Wheeler, 1995; Wu y Pruess, 2000; Julian et al., 2001; Lunati y Jenny, 2006; Tong et al., 2013; Naji, 2016). De los cuales, debido a su simplicidad de implementación y a los extensos resultados en el análisis de estabilidad y convergencia, los esquemas de diferencias finitas son los más usados para la solución de sistemas de tipo reacción-transporte. A pesar de que los esquemas diferencias finitas permiten obtener buenas aproximaciones su convergencia y estabilidad depende de los parámetros de discretización y en problemas donde las fronteras son descritas por ecuaciones en derivadas los errores de aproximación se propagan en todo el dominio reduciendo el orden global de dichos esquemas. Para disminuir los errores de aproximación y garantizar la estabilidad del método se puede incrementar el número de nodos, provocando a incrementos considerables de tiempo de cómputo.

Con el propósito de mejorar las condiciones de los esquemas de aproximación numérica para modelos de tipo reacción-transporte, en recientes años se han presentado diversas propuestas, entre las que destacan las formulaciones de ecuaciones integrales (FEI) basadas en funciones de Green (Kesten, 1969; Dixit y Tavlarides, 1982; Taigbenu y Liggett, 1986;

Dargush y Banerjee, 1990; Onyejekwe, 2002). Las FEI se basan en la inversión analítica del modelo, transformando los operadores diferenciales en operadores integrales, lo cual le provee mejores propiedades de estabilidad y convergencia, logrando reducir el tiempo de cómputo de la solución (Valdes-Parada et al., 2007; 2008; Hernandez-Martinez et al., 2011). Además su estructura permite identificar las contribuciones individuales que componen las interacciones reacción-transporte (i.e., acumulación, reacción y condiciones de frontera), lo que lo hace una interesante alternativa para el análisis físico de los procesos (Hernandez-Martinez, et al., 2011; 2013). Aún más, se ha mostrado que los esquemas de DF (estándar y no estándar) son un caso particular de las FEI, los cuales surgen en forma natural y sin uso de reglas heurísticas o expansiones de series de Taylor (Alvarez-Ramirez et al., 2007; Hernandez-Martinez et al., 2011; 2013).

Los modelos de pruebas de trazadores poseen la estructura clásica de los modelos reacción-transporte, donde para cuantificar el hidrocarburo en los yacimientos es necesario tener un buen conocimiento de las interacciones entre los fenómenos de transporte y las reacciones químicas, lo cual sugiere que las formulaciones integrales pueden ser una metodología relevante para el análisis de los modelos. Por lo anterior, en este trabajo se propone el uso de las FEI basadas en funciones de Green para la simulación de modelos de pruebas de trazadores, considerando dos modelos típicos de inyección de trazador en medios homogéneos y heterogéneos.

1.2 Antecedentes

La extracción y procesamiento de hidrocarburos es una de las principales actividades económicas de muchos países. En México, según cifras de Petróleos Mexicanos (PEMEX) existen 449 campos en producción con 9,439 pozos en explotación, 37 pozos exploratorios con más del 50% de probabilidades de éxito y 1,238 pozos que se encuentran terminados. Con ello, la producción de crudo alcanza los 2,548 Mbd (millones de barriles diarios) y la de gas natural 6,385 MMpcd (miles de millones de pies cúbicos diarios). Las cifras anteriores posicionan a México como el lugar once de los países exportadores de petróleo crudo, con una producción de 1,338 miles de barriles diarios (INEGI, 2015). Por lo que, la industria del petróleo se está centrando en el desarrollo de metodologías que mejoren la producción del petróleo.

El proceso de producción de hidrocarburo consta de varias etapas, iniciando con la fase de exploración donde se busca en el subsuelo la presencia de estructuras geológicas que tengan una alta probabilidad de almacenar petróleo. Después de esta etapa y de una serie de estudios que abarcan el reconocimiento tanto de la superficie como del subsuelo, se inicia la fase extracción la cual dependiendo del estado del pozo puede comprender en una de tres etapas. La primera de ellas, se denomina extracción o recuperación primaria y es en la que

el aceite es extraído aprovechando la energía natural del yacimiento, esta energía desplaza el hidrocarburo del yacimiento (el cual tiene una presión superior) hacia el pozo y de ahí a la superficie. Esta energía en el interior puede mantenerse por más tiempo si es que el yacimiento cuenta con una bolsa de gas o un acuífero activo. La diferencia de presiones provoca que el aceite fluya al exterior y cuando la diferencia de presiones es mínima o cuando la relación entre los otros fluidos y el hidrocarburo es muy grande, se termina esta primera etapa. Después de esto, se inicia la recuperación secundaria, en ella, se inyecta un fluido más barato que el petróleo, generalmente agua, al interior de un pozo adyacente, llamado pozo inyector con la finalidad de incrementar la presión del interior y de esta forma el aceite fluya hacia el exterior hacia otro pozo, llamado pozo productor. Al terminar esta etapa, se sabe que en promedio hay aún un 72% del aceite que había originalmente y para concluir con la extracción se pasa a la etapa terciaria, o recuperación mejorada, y en ella se emplean gases, solventes, emulsiones miscibles o polímeros. La etapa de recuperación mejorada permite la extracción de una cantidad importante de hidrocarburo, sin embargo no es posible obtener el 100% del hidrocarburo del yacimiento, dejando una cantidad considerable entre las fracturas naturales del pozo. Generalmente, el pozo termina abandonado debido a que es más costoso recuperar el hidrocarburo restante que el costo del mismo. Se estima que si fuera posible recuperar el 1% de este remanente de cada uno de los yacimientos abandonados a nivel mundial, la producción obtenida oscilaría entre los 10 mil millones de barriles, lo cual equivalente al volumen de reserva mundial.

Para proponer una estrategia que permita la extracción del remanente es necesario conocer la estructura del yacimiento y determinar las posibles rutas de transporte del hidrocarburo. Una de las primeras propuestas es la descrita por Warren y Root (1963), donde consideran un modelo simplificado de doble porosidad el cual considera una matriz porosa donde se almacena el hidrocarburo y las fracturas donde puede transportarse. Las primeras consideraciones de su modelo son las siguientes: i) el material que contiene la porosidad primaria es homogéneo e isotrópico, y está contenido dentro de una matriz sistemática de paralelepípedos rectangulares idénticos; ii) toda la porosidad secundaria está contenida dentro de un sistema ortogonal de fracturas continua y uniforme que están orientados de manera que cada fractura es paralela a uno de los ejes principales de la permeabilidad; iii) las fracturas normales a cada uno de los ejes principales son idénticamente espaciadas y son de anchura constante; iv) el espaciamiento fractura es diferente a lo largo de cada uno de los ejes para simular el grado apropiado de anisotropía; v) el complejo de porosidades primarias y secundarias es homogénea aunque anisotrópico, el flujo puede ocurrir entre las porosidades primarias y secundarias, pero el flujo a través de los elementos de porosidad primaria no puede ocurrir. Dicho modelo ha sido usado para el estudio de las interacciones de tipo reacción-transporte inmersas en los yacimientos petroleros, por lo que ha sido aplicado en un gran número de investigaciones, donde se ha encontrado que a pesar de las simplificaciones es posible obtener buenas aproximaciones del flujo de hidrocarburos en

yacimientos naturalmente fracturados (Kazemi, 1969; Kazemi et al., 1976; Bourdet et al., 1989; Berkowitz, 2002; Sahimi, 2011).

Para reducir los errores de aproximación, también se han propuesto metodologías que consideran la geometría compleja de las fracturas, por ejemplo la de Granet et al. (2001) donde emplean el llamado el método de elemento de fisura el cual permite una mejor aproximación de la estructura entre la matriz y la fractura. Sus resultados numéricos fueron validados frente a simuladores tradicionales de yacimientos petroleros, encontrando buena correspondencia entre los resultados. Resultados recientes también proponen modelos matemáticos que consideran estructura fractal del medio. El trabajo reportado por Hernandez-Coronado et al., (2012) y Herrera-Hernandez et al., (2013) proponen un modelo de difusión-advección, donde los parámetros son descritos por leyes de potencia, lo cual describe un comportamiento invariante a diferentes escalas. Los resultados son comparados frente a resultados obtenidos usando modelos tradicionales y datos experimentales de pruebas de trazadores, encontrando que su modelo permite mejores aproximaciones a los datos de campo que los modelos tradicionales.

Una de las estrategias para la determinación del hidrocarburo y sus posibles rutas de transporte es mediante las pruebas de trazadores. Dichas pruebas no es más es que inyectar una sustancia en el yacimiento con la intención de que, mediante la comparación de las lecturas de las concentraciones a la entrada y salida, se pueda estimar la cantidad de petróleo remanente. El trazador generalmente es un compuesto radiactivo, el cual puede ser seguido entre las estructuras complejas del yacimiento (Aeby et al., 2001). Existen trazadores que pueden ser absorbidas o que reaccionan con los hidrocarburos que son utilizados para aproximar la cantidad de petróleo (Keller, 1974; Khaledialidusti et al., 2015). No siempre es posible hacer determinaciones experimentales por lo que es necesario el uso de los modelos matemáticos para realizar aproximaciones. Al-Ghamdi y Ershagi (1996) realizan un estudio sobre pruebas de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados. Para ello consideran el modelo simplificado de Warren y Root distinguiendo dos tipos de fracturas, micro y macro fracturas. Sus resultados reflejan que la contribución de las microfracturas es significativamente sobre la respuesta de los trazadores analizados. Sus resultados también sugieren que la consideración de diferentes escalas de fracturas constituye mayor complejidad en los modelos propuestos, principalmente en los esquemas de solución numérica. Más adelante, Coronado y Ramírez-Sabag, (2008) presentan un modelo matemático para la prueba de trazadores considerando diferentes situaciones físicas de inyección del trazador. Su propuesta cuenta con tres regiones acopladas (inyección-falla, falla y falla-producción), donde suponen que las tres regiones se encuentran alineadas y el flujo que pasa a través de ellas es lineal. El modelo propuesto considera únicamente transporte convectivo y difusivo del trazador, por lo que utilizan una solución analítica mediante la transformada de Laplace y un esquema numérico para la inversión de la ecuación. Sus resultados muestran que las simulaciones son eficientes, pero están acotados

a modelos unidimensionales. Los efectos de las contribuciones de las condiciones de frontera permiten considerar diferentes métodos de inyección de los hidrocarburos, por lo que Coronado et al., (2009) extiende sus resultados analizando diferentes propuestas de condiciones de frontera que van desde inyección constante hasta inyección de tipo pulso.

Resultados recientes discuten la aplicación de modelos matemáticos complejos para la descripción del transporte de trazadores (Hernandez-Coronado et al., 2012; Herrera-Hernandez et al., 2013; 2015), determinando que los modelos que consideran los efectos geométricos del yacimiento es posible reducir la diferencia entre los modelos matemáticos y los resultados experimentales. Sin embargo, dada la complejidad de tales modelos las soluciones también tienden a ser más complicadas. En ese sentido, los esquemas numéricos se vuelven importantes, ya que permiten encontrar las soluciones de los modelos matemáticos, independientemente de la complejidad de ellos. Existe una gran variedad de métodos numéricos que han sido aplicados para la solución de modelos de pruebas de trazadores, entre los que se encuentran elemento finito (Chase, 1971), transformada de Laplace numérica (De Hoog et al., 1982), volumen finito (Guvanasen y Guvanasen, 1987), diferencias finitas (Wu y Pruess, 2000), entre otros. Cada método tiene sus ventajas y desventajas, sin embargo los esquemas de diferencias finitas (DF) son los de mayor aplicación, debido principalmente a su fácil implementación y a sus múltiples resultados de estabilidad y convergencia. No obstante, los errores de aproximación de DF dependen de la selección de los parámetros de discretización y no siempre se alcanza la convergencia.

Un método alternativo para la solución numérica de modelos de tipo reacción-transporte que han sido direccionados a la eliminación de las inestabilidades que pueden presentar los métodos tradicionales de DF son las formulaciones de ecuaciones integrales (FEI). La idea general de FEI es la inversión analítica de los operadores diferenciales a operadores integrales, permitiendo una directa incorporación de las condiciones de frontera y reducción en la propagación del error ocasionada por las derivadas numéricas. Esta metodología ha sido aplicada en la solución numérica en diferentes campos de la ingeniería como en la física y mecánica cuántica, ciencia de los materiales (Pan, 1997), electromagnetismo (Duffin y Mcwhirter, 1975), electrónica (Janicki et al., 2002), entre otros. Sin embargo, a diferencia de los métodos clásicos de discretización, la literatura reportada sobre el uso de funciones de Green aplicadas a problemas donde intervienen interacciones reacción-transporte, es escasa. Los trabajos más relevantes para la solución de sistemas reacción-transporte han mostrado que la FEI proveen mejores aproximaciones numéricas que DF, tanto en reducción de tiempo de computo como en estabilidad y convergencia (Kesten, 1969; Dixit y Tavlarides, 1982; Mukkavilli et al., 1987; Taigbenu y Liggett, 1986; Dargush y Banerjee, 1990; Taigbenu y Onyejekwe, 1999; Onyejekwe, 2002). Recientemente Valdés-Parada et al., (2007; 2008) demuestran, en base a extensas simulaciones, que en procesos estacionarios tanto de reacción-difusión como en reacción-difusión-convección las FEI tienen grandes ventajas frente a esquemas clásicos de diferencias finitas, que se reflejan

en la reducción del tamaño de mallado en la discretización y en el tiempo de computo. Por otro lado, Hernández-Martínez, (2011b) calculó las funciones de Green a partir de variación de parámetros para resolver numéricamente el modelo de un reactor tubular no isotérmico. El análisis se realizó en estado estacionario y dinámico. Las simulaciones numéricas se emplearon para el diseño de esquemas de control en cascada para reactores tubulares. Los resultados obtenidos reafirman la capacidad numérica de FEI contra DF en modelos reacción-transporte.

Aún más, Álvarez-Ramírez et al., (2007, 2009a, b) demostraron que el esquema de diferencias finitas es un caso particular de las FEI. De hecho, mostraron que el esquema de diferencias finitas basadas en funciones de Green (DFFG) surge de manera natural sin el uso de reglas Heurísticas, además de una exacta incorporación de las condiciones de frontera. El esquema de DFFG modifica la discretización de los nodos en la frontera de esquema clásico de diferencias finitas mejorando la aproximación numérica global. Dicho estudio se enfocó a sistemas reacción-difusión en coordenadas rectangulares, curvilíneas y de alto orden con condiciones a la frontera tipo mixtas (i.e., Dirichlet más Neumann). Hernández-Martínez et al., (2011a; 2011c; 2013) extendieron los resultados a condiciones a la frontera tipo Robin, coeficiente de difusión no homogéneo, dominio, sistemas reacción-difusión-convección, entre otros. Es importante resaltar que las FEI permiten identificar las contribuciones individuales presentes en los sistemas reacción-transporte tales como la dinámica del proceso, la fuente y las condiciones de frontera. Finalmente, debido las propiedades que exhiben las formulaciones integrales y la función de Green, es posible extender los resultados reportados en la literatura a sistemas reacción-transporte fraccionarios, es decir, en sistemas que son modelados con ecuaciones diferenciales de orden fraccionarios (Hernández-Martínez et al., 2016).

Los resultados arriba descritos indican que las FEI son una alternativa viable para la solución de problemas de tipo reacción-transporte. Por lo cual, en este trabajo se propone la extensión de las FEI a modelos de pruebas de trazadores, buscando mejorar los esquemas numéricos tradicionales y al mismo tiempo explotar su estructura matemática para mejorar el entendimiento de las interacción reacción-transporte.

1.3 Hipótesis

El presente trabajo se fundamenta de la siguiente hipótesis:

1. Para la solución de modelos de pruebas de trazadores, el uso de formulaciones de ecuaciones integrales proveen mejores aproximaciones que los esquemas de diferencias finitas tradicionales.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Desarrollar esquemas numéricos basados en formulaciones integrales que proporcionen información detallada de las interacciones en los modelos de pruebas de trazadores y que disminuyan los errores numéricos que surgen en los esquemas clásicos.

1.4.2 Objetivos Particulares

- Estudiar diferentes modelos que describen pruebas de trazadores en yacimientos petroleros y analizar diferentes condiciones del proceso.
- Desarrollar las formulaciones integrales para los modelos de pruebas de trazadores estudiados.
- Analizar las componentes individuales que constituyen las interacciones reacción-transporte que conforman los modelos de pruebas de trazadores.
- Evaluar los esquemas numéricos desarrollados y verificar su eficacia frente a los métodos clásicos de discretización.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Industria del petróleo

México es uno de los países productores de petróleo más importantes a nivel mundial, ocupando el décimo lugar en el ranking mundial en el año 2014. Siendo Estados Unidos el primer lugar con un 13.1% de la producción mundial, lo que equivale a 11,664 miles de barriles diarios. Nuestro país tiene una producción de 2,875 miles de barriles diarios, lo cual contribuye con 3.5% de la producción mundial. Fuente: Observatorio de la Energía, Tecnología e Infraestructura, para el desarrollo. Sin embargo, para el 2015 la producción de hidrocarburo pasó de ser el 10% del PIB nacional al 6%, lo cual impactó en diferentes sectores de la sociedad (INEGI, 2015). Lo anterior, ha contribuido en la necesidad de buscar alternativas que permitan optimizar el uso y comercialización del petróleo. El petróleo como materia prima tiene un gran número de aplicaciones industriales, como se puede observar en el siguiente esquema:

La producción del hidrocarburo requiere de diferentes etapas, que a grandes rasgos se pueden describir como sigue: localización del yacimiento petrolero, perforación, extracción y métodos de recuperación y cierre del pozo. Cada etapa es compleja y requiere de un estudio particular donde intervienen un conjunto estudios previos.

2.2 Yacimientos petroleros

Los yacimientos son depósitos de hidrocarburo, que aunque no se conoce completamente su origen, se sabe que provienen de poner en condiciones extremas (de presión y temperatura) a restos orgánicos (Engler, 1911). El depósito se compone de rocas llamadas roca madre, compuestas principalmente de arenas (roca porosas) y arcillas (roca sello). Las rocas almacén deben ser porosas, con grandes huecos que rebasen la media de poros para contener mayor cantidad de hidrocarburos, (e.g., 0.075 mm es impermeable para el agua, pero no para los hidrocarburos ligeros). En general, un yacimiento debe cubrir cinco características: fuente, camino migratorio, trampa, almacenaje/porosidad y permeabilidad.

La Figura 2.2 muestra un esquema representativo de la composición y localización de los yacimientos.

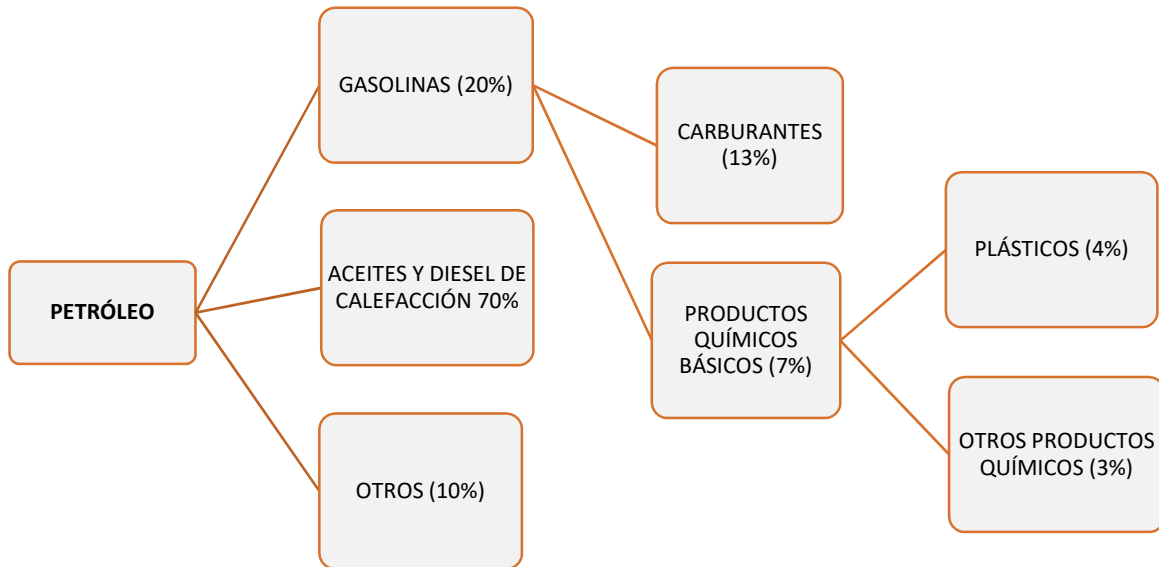


Figura 2-1. Esquema de las aplicaciones más relevantes de las aplicaciones industriales del petróleo.

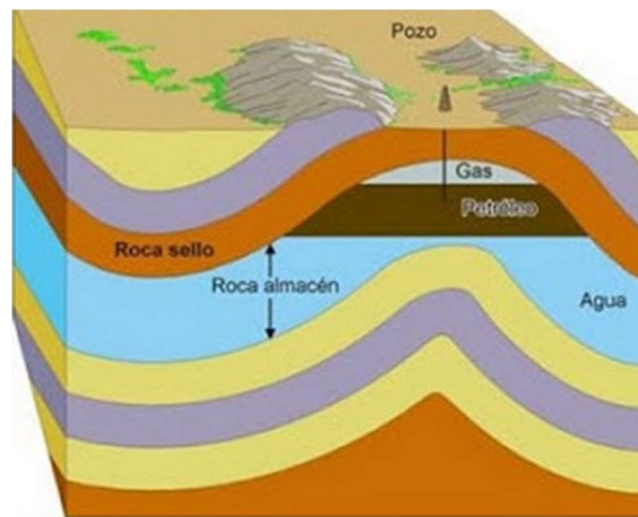


Figura 2-2. Esquema de la localización de un yacimiento petrolero

El estudio detallado de las particularidades físicas de cada yacimiento, es una manera de optimizar la producción de petróleo, pues si se emplean los métodos inadecuados la recuperación del hidrocarburo puede disminuir en vez de incrementar. Por lo cual, la selección de la etapa de producción es fundamental tomando en cuenta que la extracción debe ser individualizada para cada yacimiento (Ramírez-Sabag et al., 1995).

Dependiendo de las características y la topología de cada yacimiento de petróleo, actualmente la producción de petróleo se realiza en tres etapas. La primera de ellas es en la que mediante un gradiente de presiones se ocasiona que el aceite fluya hacia el exterior, dicho gradiente se puede lograr con algún método de empuje tal como, por gas disuelto, por la capa de gas, por expansión de la roca, por segregación gravitacional o empuje hidráulico por efecto del acuífero (Federal, 2010). La segunda etapa requiere para la extracción de otros métodos, como la inyección de agua o gases miscibles como CO_2 o N_2 . Finalmente, la tercera etapa consiste en emplear técnicas de combustión o de calor, aunque no necesariamente con cada uno de los yacimientos se puede llegar a esta etapa, pues como ya se dijo, cada uno de los yacimientos tiene sus propias características.

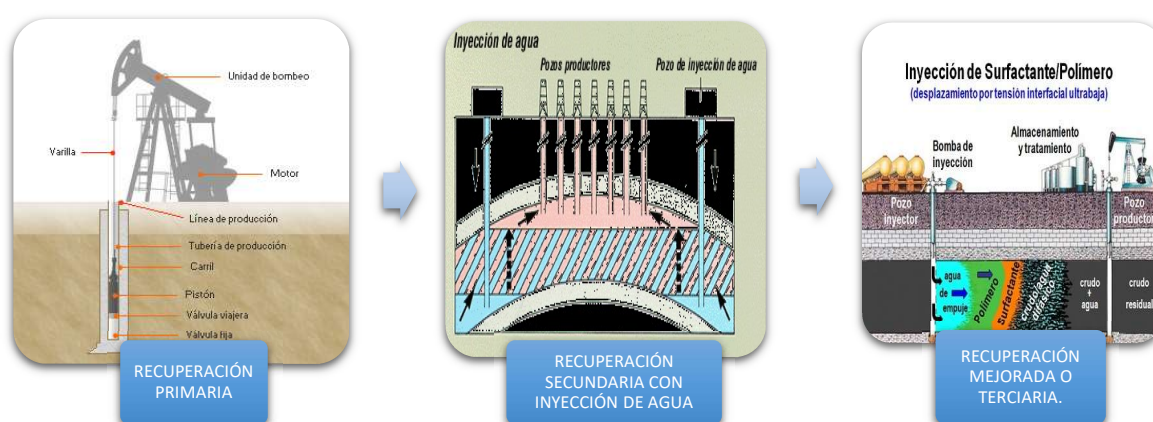


Figura 2-3. Etapas de la extracción del hidrocarburo

2.2.1 Yacimientos petroleros en México

En México, el complejo más grande que existe se localiza en el estado de Campeche y es llamado complejo Cantarell, el cual se considera como un conjunto de campos maduros con perforaciones de aproximadamente 3 mil metros de profundidad sobre roca de alta permeabilidad y de gran espesor. Dicho complejo está dentro de la lista de los 100 campos más grandes del mundo. Su explotación inició en los años 70 y para el año 2004 inició su agotamiento reduciendo la producción hasta un 15% (Romo, 2015). El complejo Cantarell se compone de once campos (Tabla 2.1), uno de ellos, el campo Akal ha comenzado a agotarse y se considera que ha sido la causa de la declinación de Cantarell.

Tabla 2-1. Descripción de los 11 campos del complejo Cantarell

CANTA	Tipo de producción.	Producción
-------	---------------------	------------

RELL			(MBD)*
Nohoch		Este campo alcanzó su máximo en el año 2001 con 69 MBD para luego declinar.	8
Chac	Inició su producción en 1990.		10
Akal	Este campo aporta un 75% de las reservas probadas de Cantarell y un 16.9% de la producción nacional.	Alcanzó su máximo de producción en el año 2005 con 65.5 % del total de producción nacional de crudo para luego desplomarse en 2014 con 14.7%.	177
Balam	Este campo inició con una producción de 3.7 MBD para alcanzar su máximo en 1994, con una producción de 55 MBD, sin embargo en 1997 alcanzó un mínimo de producción de crudo con 6.9 MBD.	Es uno de los campos con mayores reservas probadas.	9
Takín	Es un campo reciente cuya producción inició en 2008 con 7 MBD. Se considera que su producción ya está en declinación.		8
Sihil	Este campo ha tenido un declive en su producción de casi a la mitad con un 47.7% del 2013 al 2014.	Es el segundo campo con más reservas probadas del conjunto Cantarell.	57
Ek	Este campo tuvo una disminución en su producción de casi una quinta parte según datos de PEMEX.	Estos tres campos, en conjunto con el campo Sihil, aportan casi la quinta parte de la	41

Kutz	Productor de gas natural.	producción de Cantarell.	210
Ixtoc	Productores de petróleo pesado que va de los 12 y 24° API (American Petroleum Institute), con alto contenido de azufre y metales		33
Kambesah			
Után	Este campo no produce.	Sólo cuenta con reservas de gas natural.	----

*MBD: Miles de barriles diarios

La producción de petróleo crudo en México se encuentra catalogada en cuatro regiones; región marina noreste (en la cual se encuentra Cantarell), región marina suroeste, región sur y región norte. El mayor aporte proviene de la región noreste con 1,231.6 miles de barriles diarios de la producción nacional que según datos de PEMEX ha sido de 2,428.8; por lo que se observa que más del 50% de la producción deriva de esta zona, el otro 50% es aportado por las otras tres regiones.

2.3 Recuperación de Hidrocarburos

La recuperación primaria del hidrocarburo puede ser mediante cinco mecanismos de producción natural (i.e., que no depende de fluidos externos para su extracción): compresibilidad de la roca y fluidos, liberación de gas en solución, segregación gravitacional, empuje por capas de gas y desplazamiento hidráulico. La selección del método depende de la composición de la mezcla entre petróleo, gas y agua de formación.

1. Compresibilidad de la roca y de los fluidos: al pozo productor se incrementa la diferencia entre la presión de sobrecarga y la presión de poro, lo que ocasiona una reducción del volumen poroso del yacimiento y la expansión o cambio en el volumen de los fluidos presentes.
2. Liberación de gas en solución: únicamente presente en los yacimientos cuya presión es menor que la presión de burbuja (*yacimiento saturado*). Iniciando la movilización del gas hacia los pozos productores una vez que la saturación del gas liberado exceda la saturación de gas crítica, haciéndose este móvil.
3. Segregación gravitacional: este mecanismo es característico de los yacimientos que presentan un alto buzamiento, por lo que posee una alta permeabilidad vertical, permitiendo así una fácil migración del gas hacia el tope. Esto permite que el flujo en contracorriente mediante el cual el gas migra hacia la parte alta de la estructura y el petróleo hacia la parte baja, por razones de diferencia de densidad, esto en

respuesta de que las fuerzas gravitacionales actuantes son mayores que las fuerzas viscosas presentes en el pozo.

4. Empuje por capa de gas: Este mecanismo está presente en yacimientos que se encuentra a presiones inferiores a la presión de burbujeo. En lo que existe una capa de gas, la cual tiende a expandirse debido a la disminución de presión actuando esta como una fuerza de empuje que obliga al petróleo a desplazarse
5. Desplazamiento hidráulico: se presenta cuando existe una porción de roca con alta saturación de agua (Acuífero). Debido a la expansión del agua del acuífero (a medida que se reduce la presión), este invade el yacimiento, reemplazo a los fluidos que ya han sido extraído. Este es uno de los mecanismos de producción más efectivo debido al constate suministro de agua del acuífero, ya que no hay caída de presión en el sistema o cae muy poco.

Por otro lado, también existen métodos de recuperación inducidos, lo cuales se conocen comúnmente como métodos de inyección de fluidos. Este mecanismo se aplica cuando los mecanismos de producción natural ya no son eficientes (pérdida de la presión del yacimiento), por lo que constituye un mecanismo secundario (artificial) para restablecer la presión del yacimiento que se ha perdido debido al tiempo de producción. En general, el mecanismo consiste en inyectar agua por debajo de la capa de petróleo o inyectar gas por encima de la misma (o en algunos casos ambas), de tal forma se mantenga la presión y sea posible recuperar el hidrocarburo por diferencia de presiones (Rodríguez, 1987). La evaluación que realizan los ingenieros petroleros para determinar que método o métodos se usarán en la extracción del petróleo y en qué orden, depende de un conjunto de variables, que van desde el análisis de rocas, análisis de fluidos, pruebas de producción hasta pruebas de bombeo.

Cuando a un yacimiento ya se le han aplicado alguno o algunos de los métodos de extracción posibles y ya no es viable continuarlos, es decir la producción del hidrocarburo cesa, debido a que el precio del crudo y sus ganancias no cubren el costo de emplear tecnologías complejas y costosas, entonces el pozo llega a una etapa de abandono. Esta se considera el término de la vida útil del yacimiento, a pesar de que en muchos casos aún exista una cantidad considerable de aceite remanente en su interior, el cual queda atrapado entre los poros y los intersticios de la piedra porosa, y puede llegar a ser hasta la mitad de la cantidad original del yacimiento (Ramírez-Sabag, 2008). Uno de los métodos que existe actualmente para conocer la ruta del petróleo y para determinar la cantidad de remanente en cada yacimiento abandonado es la inyección de sustancias que marquen el fluido de inyección, a tales sustancias se les denomina trazadores.

2.4 Prueba de trazadores

Una prueba de trazador consiste en disolver una tinta o químico e inyectarla a un pozo para luego monitorear su desplazamiento y su salida en un pozo productor vecino. La finalidad de la prueba de trazador es predecir la cantidad de aceite que permanece dentro del yacimiento, así como la cantidad de agua que está presente en el yacimiento. Al salir el trazador por el pozo productor, se obtienen los puntos donde la concentración de este es superior a la concentración del aceite que está dentro del pozo y a partir de estos puntos, se puede obtener una curva la cual se denomina curva de surgencia. En general, las pruebas de trazador pueden aportar la siguiente información (Ramirez-Sabag, 2008):

- Conexión entre pozos.
- Heterogeneidades o fallas en el interior del yacimiento
- Comunicación vertical entre estratos
- Movimiento de los fluidos
- Saturación del aceite que permanece dentro del pozo.

Una prueba de trazador comienza desde la selección de los pozos, para determinar los que se inyectaran y los que serán monitoreados en su producción, hasta elegir el tipo de trazador que se va a utilizar, en que cantidad y el tiempo que durará la prueba. Por ejemplo, hay una prueba de trazador de calor con temperatura controlada. Esta prueba consiste en inyectar un trazador de calor dentro de un yacimiento tipo pozo abierto con flujo vertical que cuente con sensores de temperatura de fibra óptica. La prueba de trazador indica la dirección del gradiente de temperatura, lo que permite conocer la pendiente y es así como se puede inferir las temperaturas que se tienen en las fronteras. La principal desventaja al utilizar este método es el riesgo de introducir contaminantes dentro del pozo. Este tipo de pruebas indica la velocidad, dirección del flujo y permite ubicar medios porosos dentro del yacimiento (Shellwood, 2015).

También existen pruebas de trazadores que se realizan in-situ que permiten determinar la conexión entre los pozos y la localización de las principales fracturas en el yacimiento, proveen información de la geometría y las características geológicas del yacimiento (Neretnieks y Moreno, 2003).

2.4.1 Trazador: tipos y características

Un trazador es una sustancia disuelta en agua, que se inyecta en los pozos productores y tiene varios objetivos, como lo son: indicar la comunicación entre pozos, indicar la ruta del aceite o bien, medir la cantidad de aceite en el yacimiento. Este último propósito es el que se piensa estudiar en este proyecto. Existen varios tipos de trazadores, comúnmente se emplean los trazadores químicos, los cuales pueden ser tintas, compuestos iónicos u

orgánicos. Es posible manejarlos en estado líquido o en estado gaseoso. De igual forma existen también pruebas que se realizan con trazadores radioactivos, pero su utilización es limitada dado que es más delicado su empleo y su costo es mayor. Así mismo, existen trazadores naturales, como las filtraciones propias del agua al subsuelo. Un trazador óptimo es aquél que, viaja a la velocidad inyectada y sigue la ruta del agua, es fácil de identificar y es posible medirlo cuantitativamente.

En el caso en que se emplea un trazador gaseoso, se obtienen un sistema bifásico entre el gas y el petróleo. El gas se va frenando, lo cual no es un comportamiento ideal puesto que no sigue la ruta esperada. A pesar de que se cuentan con diversos resultados que muestran la eficiencia de las pruebas de trazadores, su aplicación es muy particular debido a que cada yacimiento posee características particulares y no es posible extender fielmente los resultados reportados. Esto es un indicador de que la aplicación de pruebas de trazadores no es una tarea sencilla. Además, para interpretar una prueba de trazadores, se debe considerar el modelo geológico (i.e., las características y propiedades de las rocas donde se encuentra atrapado el hidrocarburo), lo cual hace más compleja su aplicación. Existen diferentes metodologías para analizar la factibilidad de aplicación del trazador, entre las que se encuentran las pruebas experimentales en laboratorio y de campo, y el uso de modelos matemáticos. La primera alternativa ofrece información relevante que permita la aplicación directa, sin embargo es sumamente costosa y no siempre se obtienen resultados favorables. Por otro lado el uso de modelos matemáticos, solo provee aproximaciones con un rango de error considerable, sin embargo es una alternativa relativamente barata y los resultados pueden extenderse a diferentes campos, por lo cual diferentes grupos de investigación han optado por el uso de modelos matemáticos para el análisis de las pruebas de trazadores.

2.5 Modelos para pruebas de trazadores

Algunos modelos que se han desarrollado se describen a continuación. Wilson (2000) propone un modelo que considera el transporte del trazador en un medio poroso en dos dimensiones. El modelo incluye los términos de transporte difusivo-convectivo sobre lentes de arcilla, considerando que después de la inyección del trazador, se deja reposar el yacimiento, es decir, la velocidad a la que viaja el trazador es nula, por lo tanto no existe convección. El trazador se difunde y reacciona con el agua de formación del yacimiento. Sus resultados describen la trayectoria del trazador bajo diferentes condiciones experimentales y tales resultados son validados con pruebas piloto. En el trabajo de Schaffer et al., (2013) se propone el uso de un trazador sensible a la Interfaz cinética para aguas profundas de acuíferos salinos, el cual capaz de caracterizar la interfaz entre las áreas de almacenamiento del trazador inyectado en condiciones superiores al punto crítico ($P_c = 7.39\text{Mpa}$, $T_c = 31.1^\circ\text{C}$). Su propuesta permite distinguir la interfaz debido a la alta concentración y la baja solubilidad entre estas fases, por lo que es llamado trazador

interfacial. Para describir la cinética del trazador, se inyecta el trazador a una salmuera (A) y se lleva a cabo una reacción de hidrólisis.

La cinética de un trazador está definida en cuatro etapas, para ilustrar este proceso, se describe cada etapa:

- *Disolución:* Se lleva a cabo una reacción de hidrólisis entre el trazador y el CO₂, con difusión hacia la interfaz, este transporte de masa es posible, debido a que CO₂ tiene un coeficiente de difusión mayor.
- *Adsorción:* Las moléculas activas del componente A, se acumulan en la superficie hasta saturarla después de un tiempo inicial. La cantidad de moléculas adsorbidas, depende de la linealidad de la isoterma y del área en la interfaz.
- *Reacción:* Después de la reacción en la interfaz, al estar en contacto con el agua, entre esta y el componente A, se lleva a cabo una reacción de hidrólisis. Se sabe que la reacción entre un éster y el agua es (pseudo) de primer orden. El paso limitante de esta reacción está en la transferencia a través de la interfaz.
- *Transferencia:* Debido a la alta solubilidad del agua, se obtienen los productos B y C, los cuales se difunden en la salmuera y lejos de la interfaz. Por lo tanto, el aumento de la concentración de B y C, son proporcionales al decremento de la concentración del componente A y pueden ser medidas en la fase agua.

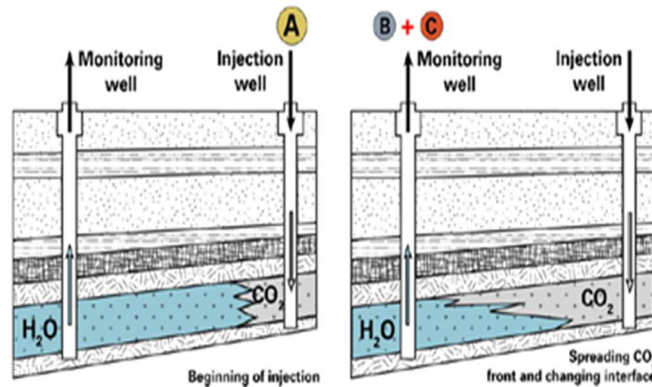


Figura 2-4. Pozo de inyección en el que se observa a) la inyección del trazador KIS y su esparcimiento junto con el CO₂ b) productos de reacción en la salmuera.

Otra idea, se presenta en el trabajo de Sharma et al., (2013) donde se considera el trazador en un medio poroso fracturado. El modelo matemático propuesto contempla el transporte difusivo-convectivo, obteniendo para la matriz

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + \frac{D_m}{R_m} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} \lambda C_m = 0 \quad (2.1)$$

donde C_m es la concentración de soluto en la solución (M / L^3) a lo largo de la matriz; D_m es el coeficiente de la matriz de difusión (L^2/T) en la matriz porosa; λ es la tasa de decaimiento constante (T^{-1}); y R_m es factor de retardo, dado por

$$R_m = 1 + \frac{\rho_b}{\theta} K_m \quad (2.2)$$

ρ_b es la densidad de los sólidos que conforman la matriz, K_m es el coeficiente de distribución que define como la masa de soluto que se adsorbe por unidad de volumen del sólido por la concentración de soluto en la solución y θ es la porosidad de la matriz. El balance para la fractura es

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} + \frac{V_f}{R_f} \frac{\partial C_f}{\partial x} = \frac{D_f}{R_f} \frac{\partial^2 C_f}{\partial x^2} + \frac{\theta D_m}{b R_f} \frac{\partial C_m}{\partial y} - \lambda C_f = 0 \quad (2.3)$$

donde C_f es la concentración de soluto a lo largo de la fractura; b es la mitad del ancho de la fractura y R_f es el coeficiente de retardo en la fractura, el cual se define como:

$$R_f = 1 + \frac{K_f}{b} \quad (2.4)$$

Y en la interfaz, los autores suponen que el coeficiente de dispersión hidrodinámica está dado por la siguiente ecuación:

$$D_f = \alpha_f V_f + D_m \quad (2.5)$$

El modelo dado por las Ec. (2.1)-(2.5) puede resolverse numéricamente y para validar resultado es necesario verificar con resultados experimentales. Es importante mencionar que el grado de aproximación de los modelos matemáticos radica en las consideraciones realizadas en la construcción del modelo. Mientras más simplificaciones, el error de aproximación es mayor. Pero a medida que el modelo es más completo, la solución del mismo es más compleja. Entre las propuestas de solución se encuentran las soluciones analíticas, semi-analíticas y numéricas. Las soluciones analíticas son las más estudiadas, sin embargo están limitadas a problemas lineales. Los esquemas semi-analíticos consideran un rango más amplio de soluciones, sin embargo los métodos son complejos y los casos de estudios aún son limitados. Por otro lado, las aproximaciones numéricas pueden ser aplicables en prácticamente todo el rango de variables, pero limitados por el tiempo de cómputo y estabilidad de los métodos.

Otras propuestas de modelos matemáticos para la descripción de medios porosos fracturados se discute en West et al., (2004) donde proponen los balances para el medio poroso y de las fracturas, las cuales se consideran uniformemente espaciadas y paralelas. Los balances se muestran a continuación:

Fractura:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{v}{R} \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{D_z}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{D_y \partial^2 C}{\partial y^2} + \lambda C - \frac{2q}{R(2b)} = 0 \quad (2.6)$$

Matriz porosa:

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{D^*}{R^*} \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} + \lambda C^* = 0 \quad (2.7)$$

La representación del dominio se presenta en la Figura 2.5.

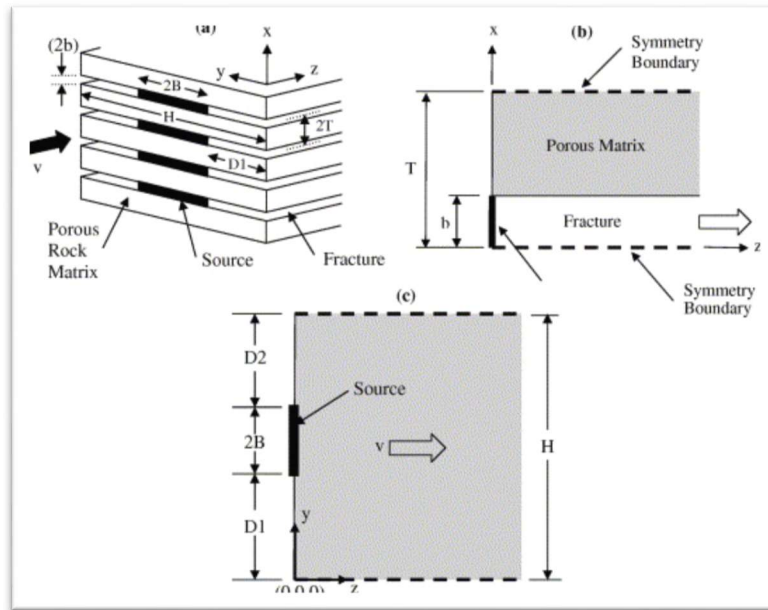


Figura 2.5. Sistema fractura-matriz propuesto en West et al., (2004)

Al interpretar una prueba de trazadores, se deberá considerar que la matriz es un conjunto de varias capas de diferentes materiales con diferentes propiedades y el hecho de que por observación se sabe que conforme el trazador se acerca a la superficie de la fractura, la difusividad efectiva de la matriz aumenta. La dispersión es una consecuencia de los diferentes tiempos de transporte convectivo por lo que las partículas tienen alternativas a través de una red de canales. En este modelo, el trazador se inyecta a manera de impulso de Dirac por lo que estos resultados no bastan para hacer predicciones.

2.6 Solución numérica de las pruebas de trazadores

La solución de modelos de pruebas de trazadores tradicionalmente se ha realizado mediante soluciones analíticas o semi-analíticas, donde solo se consideran los fenómenos de transporte en medios fracturados homogéneos (Datta-Grupta y King, 1995; Reimus et al., 2003; Seifert y Engesgaard, 2007; Coronado y Ramirez-Sabag, 2008; Coronado et al., 2011; 2012; Zhu et al., 2016). Sin embargo, dichos modelos, y sus soluciones, solo pueden ser aplicados a un número reducido de casos de estudio. La alternativa para la solución de modelos más complejos es el uso de metodologías numéricas tradicionales, tales como los esquemas de diferencias finitas, volumen finito, elemento finito, entre otros Arbogast y Wheeler, 1995; Wu y Pruess, 2000; Julian et al., 2001; Lunati y Jenny, 2006; Tong et al., 2013; Naji, 2016). De los cuales, debido a su simplicidad de implementación y a los extensos resultados. Así mismo, la aplicación de métodos espectrales o las transformadas (Jianwen, 2012; Wang y Zhan, 2015). A pesar de la gran variedad de métodos para la solución de modelos de trazadores, los métodos de diferencias finitas se encuentran entre los más usados, principalmente por la facilidad de implementación. Para ilustrar la aplicación de los esquemas numéricos en modelos de reacción transporte a continuación se presentan las generalidades de los esquemas tradicionales, incluyendo las formulaciones integrales.

2.6.1 Diferencias finitas

El método de diferencias finitas se basa la serie de Taylor lo que le provee de simplicidad y facilidad de implementación computacional. Las desventajas se centran en la reducción de orden por la implementación de las condiciones frontera sobre fronteras irregulares, y la dificultad en representar con precisión dominios irregulares. El método de diferencias finitas considera puntos específicos dentro un dominio denominados nodos. El dominio está dividido en nodos equidistantes, aunque tal consideración de intervalos iguales no es necesaria.

Si se supone que se tiene una función continua $f(x)$, al usar una expansión de Taylor se pueden deducir fórmulas en diferencias para la primer y segunda derivada representados por:

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + \frac{df_i}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3 f_i}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \\ f_{i-1} &= f_i + \frac{df_i}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3 f_i}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde al reordenar y dividir por Δx se obtienen dos expresiones para la primer derivada

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{\Delta x}{2!} + \frac{d^3 f_i}{dx^3} \frac{\Delta x^2}{3!} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.9)$$

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{\Delta x}{2!} + \frac{d^3 f_i}{dx^3} \frac{\Delta x^2}{3!} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.10)$$

La expresión (2.9) se conoce como la primera deriva en diferencias hacia adelante y (2.10) hacia atrás. $\mathcal{O}(\Delta x)$ es el error de truncamiento. La segunda derivada se obtiene de la serie de Taylor (2.8), y tiene la forma:

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.11)$$

El método de diferencias finitas tiene la ventaja de su fácil formulación, sin embargo es necesario en algunos casos un elevado número de puntos malla para obtener una alta precisión.

Aplicando los esquemas de diferencias para la primera y segunda derivada en la Ec. (2.8) se obtiene el siguiente sistema discreto,

$$\frac{\partial C_i^*}{\partial t} = \frac{D^*}{R^*} \frac{C_{i+1}^* - 2C_i^* + C_{i-1}^*}{\Delta x^2} - \lambda C_i^*; \quad i = 1 \dots N \quad (2.12)$$

donde N es el número de nodos a resolver. Nótese que la Ec. (2.8) se transforma de una ecuación diferencial parcial a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que puede ser resuelto mediante métodos de integración como Runge-Kutta.

2.6.2 Colocación Ortogonal

La colocación ortogonal es un caso especial del método de residuos ponderados, donde el residual es cero y los nodos pueden seleccionarse como las raíces de polinomios ortogonales, tales como Jacobi, Hermite, Laguerre, etc. De la misma forma que DF, este método permitir ecuaciones diferenciales parciales en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que se pueden resolver por métodos de integración como los de Runge-Kutta. Considerando los polinomios de Jacobi que se pueden generar a partir de la siguiente expresión:

$$\int_0^1 x^\beta (1-x)^\alpha P_j(x) P_N(x) dx = 0 \quad (2.13)$$

Si $\alpha=0$ y $\beta=0$, se obtienen los polinomios transformados de Legendre, con lo que se puede proponer que una función $f(x)$ se puede aproximar como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N+2} d_i x_j^{i-1} \quad (2.14)$$

Por lo que, la primera y segunda derivada de la Ec. (2-14) son,

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{N+2} d_i (i-1) x_j^{i-2} \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \sum_{i=1}^{N+2} d_i (i-1)(i-2) x_j^{i-3} \quad (2.16)$$

en donde, el término x_j representa las raíces del polinomio ortogonal seleccionado en el dominio de la ecuación diferencial. Ahora despeja d_i de la Ec. (2.14) y sustituyendo en las Ecs. (2.15) y (2.16) se obtiene la aproximación de las derivadas de primer y segundo orden. Si se considera la Ec. (2.8) la aproximación por colocación queda como sigue

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N+2} d_i (i-1)(i-2) x_j^{i-3} - \lambda C^* \quad (2.17)$$

Hay que tener en mente que pueden existir más de un vector solución cuando el sistema algebraico es no lineal, por lo que la solución que se obtenga se le deberá ser evaluada como factible termodinámicamente en función del problema que se está analizando (Jiménez-Islas, 1988). La colocación ortogonal discretiza con mayor precisión las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ya que su dominio es de frontera a frontera, mientras que en los métodos de diferencias finitas, su dominio está limitado a los nodos adyacentes. En circunstancias similares, la precisión obtenida por el mallado de colocación ortogonal equivale, en términos generales, a dos o tres veces el mallado por diferencias finitas (Finlayson, 1980, Jiménez-Islas et al, 1994), por lo que la colocación ortogonal es un método eficiente para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, tanto para valores iniciales como con valores a la frontera.

2.6.3 Formulación integral

La formulación integral es una inversión del operador diferencial en un operador integral mediante la función de Green. Para ilustrar la aplicación de la formulación integral se considera la Ec. (2.8)

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} - \lambda C^* \quad (2.17)$$

Agrupando la derivada temporal y el termino fuente, tal que

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} = \Psi(x, t) \quad (2.17)$$

donde $\Psi(x, t) = \frac{\partial C^*}{\partial t} + \lambda C^*$. Multiplicando la Ec. (2.18) por la función de Green e integrando por partes dos veces (o aplicando la fórmula de Green), se obtiene lo siguiente,

$$C^* = [\dots]_a^b + \int_a^b G(z, x) \Psi(z, t) dz$$

O bien

$$C^* = [\dots]_a^b + \int_a^b G(z, x) \frac{\partial C^*}{\partial t} dz + \lambda \int_a^b G(z, x) C^* dz \quad (2.18)$$

donde $[\dots]_a^b$ son los términos que incorporan las condiciones de frontera, el segundo término del lado derecho denota la contribución de la derivada temporal y el tercer término denota la contribución de la fuente. Para obtener el perfil de concentración C^* es necesario obtener la función de Green mediante el problema homogéneo original. Para el caso particular de la Ec. (2.8), se tiene que

$$\frac{d^2 G(z, x)}{dz^2} = \delta(z - x) \quad (2.19)$$

más las correspondientes condiciones de frontera. El cálculo de la función de Green puede ser a través de diferentes métodos, tales como variación de parámetros o expansión de funciones propias (Haberman, 2008). En Hernández-Martínez et al., (2011) se presenta la determinación de la función de Green para problemas generales considerando sistemas reacción-difusión y reacción-difusión-convección.

Capítulo 3

Modelos de Pruebas de Trazadores

3.1 Descripción Física

El modelo corresponde a una prueba de trazador aplicada en la industria petrolera para pruebas de campo, este modelo (Mukhopadhyay, 2013) describe que en la prueba se consideran tres etapas denotadas como inyección del trazador, reposo y extracción o producción del pozo. A continuación, se presenta una breve descripción de cada etapa:

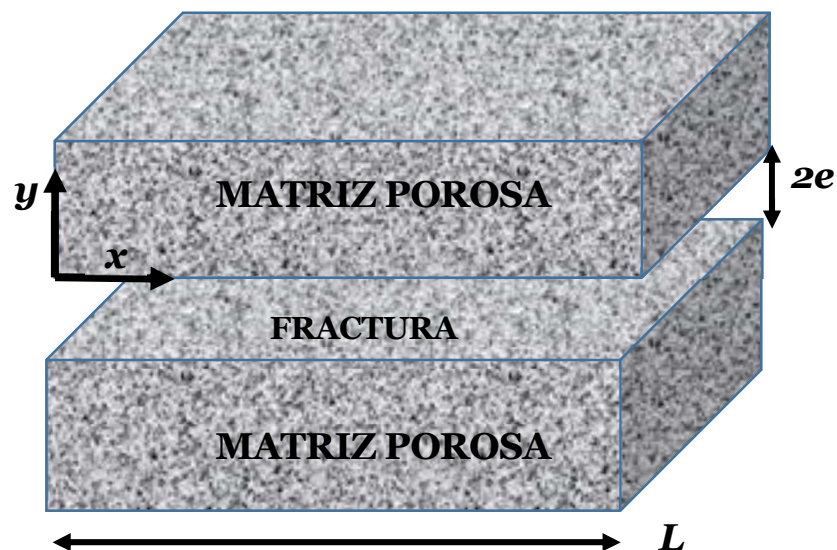


Figura 3-1. Representación gráfica del yacimiento para la prueba de trazador.

- a) INYECCIÓN: considerando un pozo que se conforma de roca porosa, agua de formación e hidrocarburo. Se ingresa el trazador al seno del yacimiento mediante una inyección tipo pulso. Una vez inyectado, el trazador se desplaza a lo largo de la fractura con velocidad constante v_f , y así mismo se transporta al interior de la matriz

mediante difusión. La Figura 3.1 muestra la geometría del yacimiento, matriz porosa-fractura-matriz porosa.

- b) REPOSO: Una vez inyectado el trazador se cierra el pozo y se deja reposar el trazador para favorecer el transporte a la matriz porosa y la reacción química. Entonces, la velocidad del trazador en la fractura disminuye gradualmente hasta que es igual a cero, de modo que el fenómeno de convección se vuelve nulo.
- c) PRODUCCIÓN: Finalmente se abre el yacimiento y se inicia la producción del aceite. Para esta situación los fenómenos de transporte van en la dirección contraria a la descrita en la etapa de inyección.

3.2 Descripción Matemática

Para la generación del modelo se considera lo siguiente:

- El trazador en la fractura se transfiere por dispersión hidrodinámica y convección.
- Se desprecia la transferencia de masa en la fractura en los ejes z, y .
- Se desprecia la transferencia de masa en la matriz porosa en los ejes x, z .
- En la etapa 1, no se llevan a cabo mecanismos de adsorción de trazador en la roca y el fenómeno de la partición.
- En la fractura y en la matriz porosa se lleva a cabo la reacción de hidrólisis.
- La reacción de hidrólisis es una reacción de primer orden irreversible, el acetato de etilo reacciona con el agua para formar ácido acético y etanol.
- Existe un término que describe la transferencia de masa en la interface matriz porosa-fractura en los límites de la fractura.
- Existe simetría en $E/2$, la división entre bloques de matrices porosas.

Bajo las consideraciones anteriores, la concentración del trazador, acetato de etilo (A), en la fractura y en la matriz porosa en la Etapa 1 se describen partir de un balance de masa al interior de la fractura:

$$\frac{\partial c_{Af}^I}{\partial t^I} = -u_f \frac{\partial c_{Af}^I}{\partial x} + D_f \frac{\partial^2 c_{Af}^I}{\partial x^2} - k c_{Af}^I + \frac{D_m \phi_m}{w} \frac{\partial c_{Am}^I}{\partial z} \Big|_{z=w} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial c_{Am}^I}{\partial t^I} = D_m \frac{\partial^2 c_{Am}^I}{\partial z^2} - k c_{Am}^I \quad (3.2)$$

donde el último término de la Ec. (3.1) representa el flujo de trazador a través de las paredes de la fractura en contacto con la matriz porosa, t^I es el tiempo de la etapa 1, x es la dirección axial, c_{Af}^I es la concentración de trazador en la fractura, c_{Am}^I es la concentración

de trazador en la matriz porosa, u_f es la velocidad de fluido en la fractura, D_f es el coeficiente de dispersión hidrodinámica en el fluido, D_m es la difusividad en la matriz porosa, r_A es la velocidad de reacción de hidrólisis y φ_m es la porosidad de la matriz porosa. La condición inicial y condiciones de frontera, son como sigue:

$$c_{Af}^I(t^I = 0, x) = c_{Aini}(x) \quad y \quad c_{Am}^I(t^I = 0, z) = 0 \quad (3.4)$$

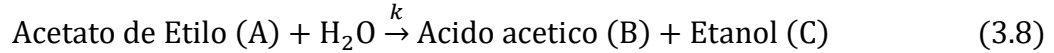
$$c_{Af}^I(t^I, x = 0) = c_{Af0}^I = \frac{m}{u_f S \varphi_f} \delta(t) \quad y \quad \left. \frac{dc_{Af}^I}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.5)$$

$$c_{Am}^I(t^I, x, z = w,) = c_{Af}^I(x, t^I) \quad y \quad \left. \frac{dc_{Am}^I}{dz} \right|_{z=E/2} = 0 \quad (3.6)$$

donde m es la masa de trazador total inyectada en $x = 0$, φ_f es la porosidad de la fractura y S es el área de la sección transversal. Para el caso general en $x = L$ (donde L es variable pero finita) se puede establecer la siguiente condición frontera,

$$c_{Af}^I|_{x=L} = c_{AfL}^I \quad (3.7)$$

La reacción química se puede representar como sigue:



La reacción es de tipo elemental por lo que la concentración de los productos de la reacción B y C corresponden directamente a lo consumido por el reactivo A.

Para la etapa 2, se proponen las consideraciones

- El trazador en la fractura se transfiere por difusión molecular.
- En la fractura y en la matriz porosa se lleva a cabo la reacción de hidrólisis.
- Los productos de la reacción de hidrólisis se transfieren a través de la fractura, también de la matriz porosa.
- El trazador en la matriz porosa se transfiere por difusión molecular.
- El trazador en la matriz porosa se adsorbe con la superficie de solido expuesta en la matriz porosa de una forma lineal.
- Se establece equilibrio local entre la concentración del trazador en la matriz porosa y el aceite en la matriz porosa y se considera a través del coeficiente de partición.

Así, la concentración del trazador en la fractura y la matriz porosa se describen por,

$$\frac{\partial c_{Af}^{II}}{\partial t^{II}} = D_{fm} \frac{\partial^2 c_{Af}^{II}}{\partial x^2} - k c_{Af}^{II} + \frac{D_m \varphi_m}{w} \frac{\partial c_{Am}^{II}}{\partial z} \Big|_{z=w} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_m(1 - S_o) \frac{\partial c_{Am}^{II}}{\partial t^{II}} + \varphi_m S_o \frac{\partial [K_{wo} c_{Am}^{II}]}{\partial t^{II}} + \rho_b(1 - S_o) \frac{\partial [K_{ds} c_{Am}^{II}]}{\partial t^{II}} \\ & = D_m \varphi_m(1 - S_o) \frac{\partial^2 c_{Am}^{II}}{\partial z^2} - \varphi_m(1 - S_o) k c_{Am}^{II} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $S_o + S_w = 1$, c_{Ao}^{II} es la concentración de trazador en la fase aceite, c_{Aads}^{II} es la concentración de trazador en la superficie expuesta de la matriz porosa, S_w y S_o son la saturación del trazador en la fase acuosa y en la fase aceite, respectivamente; y las constantes de partición y adsorción son $K_{wo} = c_{Ao}^{II}/c_{Am}^{II}$ y $K_{ds} = c_{Aads}^{II}/c_{Am}^{II}$. El primer término describe la acumulación del trazador en la matriz porosa, el segundo describe la transferencia de masa con la fase aceite y el tercer término describe la transferencia de masa con la superficie expuesta de la matriz porosa. La condición inicial y las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} & c_{Af}^{II}(t^{II} = 0, x) = c_{Af}^I(t^I = t_f^I, x) \\ & y \quad c_{Am}^{II}(t^{II} = 0, z) = c_{Am}^I(t^I = t_f^I, z) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\frac{dc_{Af}^{II}}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad y \quad \frac{dc_{Af}^{II}}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.12)$$

$$c_{Am}^{II}(t^{II}, x, z = w) = c_{Af}^{II}(x, t^{II}) \quad y \quad \frac{dc_{Af}^{II}}{dz} \Big|_{z=E/2} = 0 \quad (3.13)$$

Para la etapa 3 la concentración del trazador en la fractura y en la matriz porosa se describen por,

$$\frac{\partial c_{Af}^{III}}{\partial t^{III}} = u_f^{III} \frac{\partial c_{Af}^{III}}{\partial x} + D_f \frac{\partial^2 c_{Af}^{III}}{\partial x^2} - k c_{Af}^{III} - \frac{D_m \varphi_m}{w} \frac{\partial c_{Am}^{III}}{\partial z} \Big|_{z=w} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial c_{Am}^{III}}{\partial t^{III}} = D_m \frac{\partial^2 c_{Am}^{III}}{\partial z^2} - k c_{Am}^{III} \quad (3.15)$$

donde c_{Af}^{III} es la concentración de trazador en la fractura, c_{Am}^{III} es la concentración de trazador en la matriz porosa, u_f^{III} es la velocidad de fluido en la fractura, ϕ_m es la porosidad de la matriz porosa. La condición inicial y las condiciones de frontera son como sigue:

$$c_{Af}^{III}(t^{III}, x) = c_{Af}^{II}(t^{II} = t_f^{II}, x) \quad y \quad c_{Am}^{III}(t^{III}, z) = c_{Am}^{II}(t^{II} = t_f^{II}, z) \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{dc_{Af}^{III}}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad y \quad \left. \frac{dc_{Cf}^{III}}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.17)$$

$$c_{Am}^{II}(t^{III}, x, z = w,) = c_{Af}^{III}(x, t^{III}) \quad y \quad c_{Cm}^{II}(t^{III}, x, z = w,) = c_{Cf}^{III}(x, t^{III}) \quad (3.18)$$

Se debe notar además el cambio de signo en la velocidad del fluido debido a la inversión en la dirección del flujo, así como en el término de acoplamiento difusivo entre la fractura y la matriz porosa. La condición frontera en $x = 0$, se asocia a que en el punto de producción no existe cambio en la concentración de los componentes de la mezcla que se extrae del yacimiento. La velocidad de producción se puede asociar a la velocidad de la etapa 3.

Parámetro.	Unidades
$v_f=0.050$;	Velocidad en la fractura (m/s)
$D_m=0.0001$;	Difusión molecular efectiva (m ² /s)
$D_f=0.000000001577$;	Dispersión hidrodinámica (m ² /s)
$\phi_m =0.25$;	Porosidad de la matriz adimensional.
$w=0.05$;	Ancho de la fractura (m)
$k=0.00$;	Constante cinética de primer orden (1/s)
$S_o=0.25$;	Saturación de la fase orgánica (adimensional)
$K_{wo}=3$;	Constante de partición (adimensional)
$K_{ds}=0.01$;	Constante de adsorción (adimensional)
$R_o=1300$;	Densidad de la matriz porosa.

Tabla 3-1. Parámetros del modelo con sus valores y unidades.

3.3 Formulación para el modelo de prueba de trazadores

Para la aplicación de la formulación integral al modelo de prueba de trazadores es necesario considerar las contribuciones de cada ecuación, es decir si son de tipo reacción-difusión o de tipo reacción-difusión-convección. A continuación, se hace una descripción para cada caso,

3.3.1 Sistema reacción-difusión-convección

Considerando las Ec. (3.1) es posible agrupar los términos dinámico y reactivo, tal que

$$D_f \frac{\partial^2 C_f(x, t)}{\partial x^2} - v_f \frac{\partial C_f(x, t)}{\partial x} = \varphi(x, t) \quad (3.19)$$

Para el desarrollo de la formulación integral es necesario que el operador diferencial sea adjunto. De acuerdo con Greenberg (1971) para un operador diferencial de tipo difusión-convección con la forma:

$$L = a(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} + b(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} + c(\xi) \quad (3.20)$$

se puede transformar a un operador adjunto multiplicando por el factor de integración

$$\sigma = e^{\int \frac{b(\xi) - a'(\xi)}{a(\xi)} d\xi} \quad (3.21)$$

Dado que $a(\xi) = D_f$, $b(\xi) = -v_f$, $c(\xi) = 0$, entonces, el factor integrante para la Ec. (3.19) es $\sigma = e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)}$, lo cual conduce que el operador auto-adjunto de la concentración en la fractura:

$$LC_f(x, t) = e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \left[D_f \frac{\partial^2 C_f(x, t)}{\partial x^2} - v_f \frac{\partial C_f(x, t)}{\partial x} \right] = e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \varphi(x, t)$$

O bien

$$LC_f(x, t) = e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \varphi(x, t) \quad (3.22)$$

Si multiplicamos por una función $G(z, x)$ llamada función de Green e integrando dos veces se obtiene la fórmula de Green, tal que

$$G(z, x)LC_f(z, t) = G(z, x) \frac{\partial}{\partial x} \left[D_f e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \frac{\partial C_f(z, t)}{\partial z} \right] \quad (3.23)$$

$$\int_0^{L_z} G(z, x)LC_f(z, t)dz = D_f e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \left[G(z, x) \frac{\partial C_f(z, t)}{\partial z} - C_f(z, t) \frac{\partial G(z, x)}{\partial z} \right]_0^{L_z} + \int_0^{L_z} C_f(z, t)L^* G(z, x)dz \quad (3.24)$$

Reacomodando términos:

$$\int_0^{L_z} C_f(z, t)L^* G(z, x)dz = D_f e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \left[G(z, x) \frac{\partial C_f(z, t)}{\partial z} - C_f(z, t) \frac{\partial G(z, x)}{\partial z} \right]_0^{L_z} + \int_0^{L_z} G(z, x)LC_f(z, t)dz \quad (3.25)$$

donde $G(z, x)$ es la función de Green y L^* es el operador auto-adjunto de L . Si la función de Green satisface la siguiente ecuación diferencial

$$L^* G(z, x) = \delta(z - x) \quad (3.26)$$

Para el cálculo de la función de Green se consideran las condiciones de frontera homogéneas, tal que

$$G(0, x) = 0 \quad y \quad G(L_x, x) = 0 \quad (3.27)$$

Así, sustituyendo la Ec. (3.26) en (3.25), se obtiene

$$\int_0^{L_z} G(z, x) e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \varphi(z, t) dz =$$

$$D_f e^{\left(-\frac{v_f}{D_f}x\right)} \left[G(z, x) \frac{\partial C_f(z, t)}{\partial z} - C_f(z, t) \frac{\partial G(z, x)}{\partial z} \right]_0^{L_z} + \int_0^{L_z} C_f(z, t) \delta(z - x) dz \quad (3.28)$$

Reacomodando términos y usando la propiedad de filtración de la función delta de Dirac, se tiene

$$\begin{aligned} C_f(x, t) = D_f e^{\left(\frac{-v_f}{D_f}z\right)} & \left[G(z, x) \frac{\partial C_f(z, t)}{\partial z} - C_f(z, t) \frac{\partial G(z, x)}{\partial z} \right]_0^{L_z} \\ & + \int_0^{L_z} G(z, x) e^{\left(\frac{-v_f}{D_f}z\right)} \varphi(z, t) dz \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.3.2 Función de Green para el sistema reacción-difusión-convección

Para encontrar el perfil de concentraciones, es necesario determinar la función de Green $G(z, x)$. En la Ec. (3.29) se observa que la solución $C_f(x, t)$ está compuesta por dos términos, el primero de ellos representa la contribución de las condiciones de frontera, el segundo término describe como la función de Green va distribuyendo la fuente de la concentración del trazador a lo largo de todo el dominio. Para la función de Green, se integra la Ec. (3.26) obteniendo

$$G(z, x) = \begin{cases} \frac{c_1}{v_f} e^{\left(\frac{v_f}{D_f}z\right)} + c_2 & \text{si } z < x \\ \frac{c_3}{v_f} e^{\left(\frac{v_f}{D_f}z\right)} + c_4 & \text{si } z > x \end{cases} \quad (3.30)$$

Evaluando las condiciones de frontera (3.27) que se tienen

$$G(z, x) = \frac{1}{v_f} \begin{cases} c_1 \left[e^{\left(\frac{v_f}{D_f}z\right)} - 1 \right] & \text{si } z < x \\ c_3 \left[e^{\left(\frac{v_f}{D_f}z\right)} - e^{\left(\frac{v_f}{D_f}L_x\right)} \right] & \text{si } z > x \end{cases} \quad (3.31)$$

Para determinar las constantes c_1 y c_3 , para lo que se usan dos propiedades de la función de Green, i) el campo de concentraciones es continuo en $z = x$, tal que

$$G(x^+, x) = G(x^-, x) \quad (3.32)$$

y ii) al integrar las Ecuación (13) en el dominio $z = x^+$ y $z = x^-$, se tiene

$$c_1 = c_3 \left[\frac{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}x\right)} - e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)}}{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}x\right)} - 1} \right]$$

Lo que conduce a $c_1 = \frac{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}x\right)} - e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)}}{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)} - 1}$ y $c_3 = \frac{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}x\right)} - 1}{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)} - 1}$, obteniendo la función de Green como,

$$G = \frac{1}{v_f \left(e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)} - 1 \right)} \begin{cases} \left[e^{\left(\frac{v_f}{D_f}x\right)} - 1 \right] \left[e^{\left(\frac{v_f}{D_f}z\right)} - 1 \right] & \text{si } z < x \\ \left[e^{\left(\frac{v_f}{D_f}x\right)} - e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)} \right] \left[e^{\left(\frac{v_f}{D_f}z\right)} - e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)} \right] & \text{si } z > x \end{cases} \quad (3.33)$$

Finalmente, con la Ec. (3.33) la formulación integral (3.29) resulta

$$C_f(x, t) = - \frac{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}x\right)} - e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)}}{e^{\left(\frac{v_f}{D_f}Lx\right)} - 1} U(t) + \int_0^{Lz} G(z, x) e^{\left(\frac{-v_f}{D_f}z\right)} \varphi(z, t) dz \quad (3.34)$$

Para ilustrar la propagación de la función de Green se considera $D_f=0.1$ un dominio adimensional (i.e, $x \in [0,1]$ y $z \in [0,1]$). La Figura 3.2 y 3.3 muestran el perfil espacial de distribución de la función de Green a diferentes valores de v_f , donde se observa que la función de Green captura el efecto de la velocidad generando que la distribución de $G(z,x)$ se propague a la frontera $x=1$. Dicho efecto representa la velocidad de propagación de un fluido.

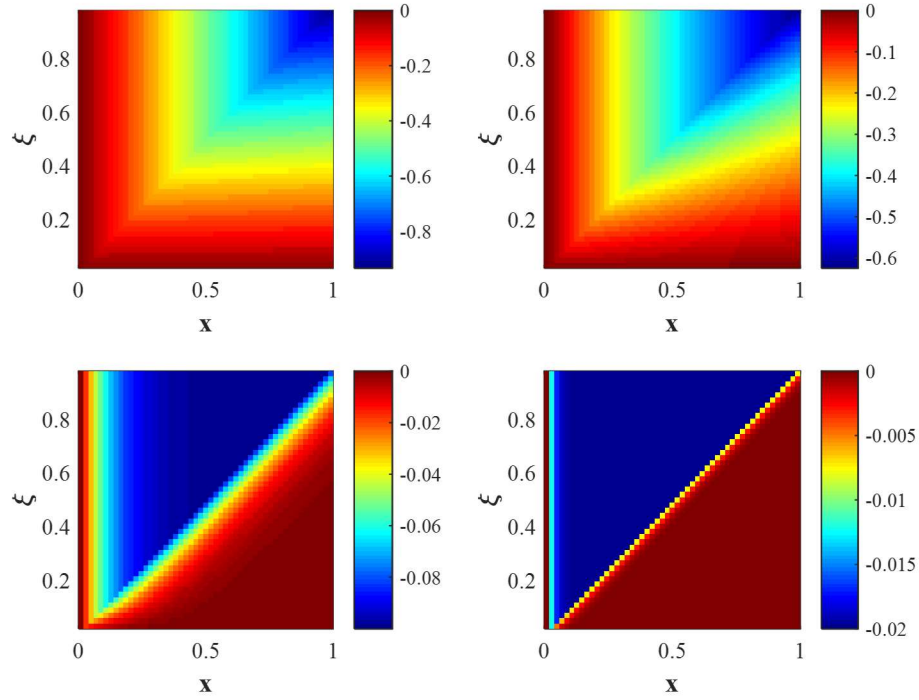


Figura 3-2. Propagación espacial de la función de Green a diferentes valores de la velocidad del fluido, a) $v_f=0$, b) $v_f=1.0$, $v_f=10$ y d) $v_f=100$

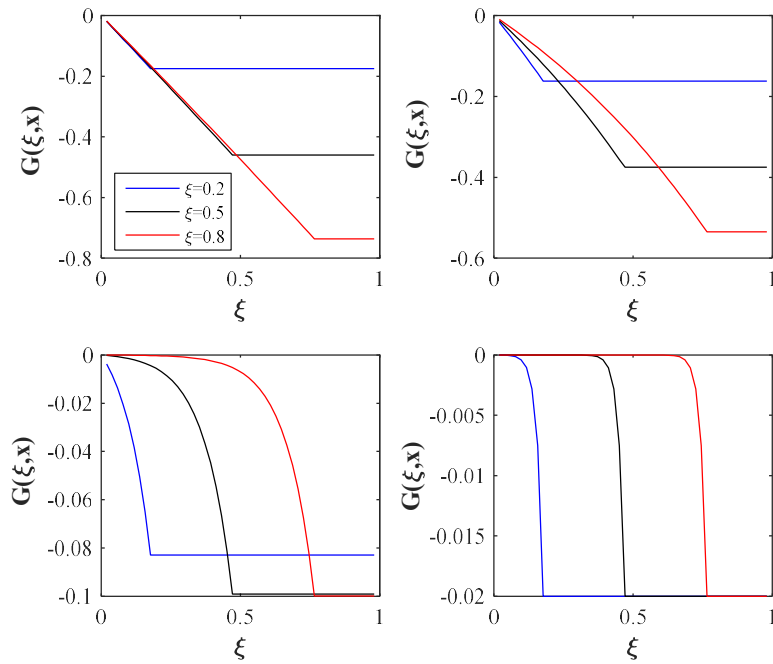


Figura 3.3. Perfil de la función de Green a diferentes valores de la velocidad del fluido, a) $v_f=0$, b) $v_f=1.0$, $v_f=10$ y d) $v_f=100$

3.3.3 Sistema reacción-difusión

Para la ecuación que describe el transporte en la matriz porosa se considera interacción reacción difusión únicamente, por lo que la Ec. (3.2) se puede describir como

$$\frac{\partial^2 C_p(y, t)}{\partial y^2} = \vartheta(y, t) \quad (3.35)$$

donde

$$\vartheta(c(y, t)) = \frac{1}{D_m} \left[\frac{\partial C_p(y, t)}{\partial t} - \frac{R'}{\phi_m \rho_w} (C_s - K C_p(y, t)) \right] \quad (3.36)$$

Para este caso el operador diferencial de segundo orden es adjunto, así que se puede usar directamente la fórmula de Green, tal que

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} G(\mu, y) L C_p(\mu, t) d\mu = \\ \left[G(\mu, y) \frac{\partial C_p(\mu, t)}{\partial \mu} - C_p(\mu, t) \frac{\partial G(\mu, y)}{\partial \mu} \right]_0^{L_y} + \int_0^{L_y} C_p(\mu, t) L^* G(\mu, y) d\mu \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde $G(\mu, y)$ es la función de Green y L^* es el operador auto-adjunto de L . Si la función de Green satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$L^* G(\mu, y) = \delta(\mu - y) \quad (3.38)$$

Y se emplean sus correspondientes condiciones de frontera homogéneas:

$$G(0, y) = 0 \quad (3.39 a)$$

$$\frac{\partial G(L_y, y)}{\partial \mu} = 0 \quad (3.39 b)$$

Ahora, se pueden sustituir las Ecs. (3.38) y (3.36) en la Ec. (3.37), y se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_y} G(\mu, y) \vartheta(y, t) d\mu = \\ \left[G(\mu, y) \frac{\partial C_p(\mu, t)}{\partial \mu} - C_p(\mu, t) \frac{\partial G(\mu, y)}{\partial \mu} \right]_0^{L_y} + \int_0^{L_y} C_p(\mu, t) \delta(\mu - y) d\mu \end{aligned} \quad (3.40)$$

Haciendo uso de la propiedad de filtración de la función delta de Dirac:

$$\int_0^{L_y} C_p(\mu, t) \delta(\mu - y) d\mu = C_p(\mu, t) \quad (3.41)$$

con lo cual se obtiene:

$$C_p(y, t) = - \left[G(\mu, y) \frac{\partial C_p(\mu, t)}{\partial \mu} - C_p(\mu, t) \frac{\partial G(\mu, y)}{\partial \mu} \right]_0^{L_y} + \int_0^{L_y} G(\mu, y) \vartheta(\mu, t) d\mu \quad (3.42)$$

Lo siguiente es evaluar las condiciones de frontera, dadas por las Ecs. (3.35) y (3.39):

$$C_p(y, t) = -C_f(x) \frac{\partial G(0, y)}{\partial \mu} + \int_0^{L_y} G(\mu, y) \vartheta(\mu, t) d\mu \quad (3.43)$$

En la Ec. (3.43) se puede notar que el perfil $C_p(y, t)$ depende únicamente de la función de Green, por lo cual se requiere determinarla. Para ello se considera la Ec. (3.40) en dos secciones, $\mu > y$ y $\mu < y$, es decir:

$$\frac{\partial^2 G(\mu, y)}{\partial \mu^2} = 0 \quad \text{Si} \quad \mu > y \quad (3.44a)$$

$$\frac{\partial^2 G(\mu, y)}{\partial \mu^2} = 0 \quad \text{Si} \quad \mu < y \quad (3.44b)$$

Integrando dos veces las Ecs. (3.44), se obtiene:

$$G(\mu, y) = \begin{cases} c_1 \mu + c_2 & \text{si } \mu > y \\ c_3 \mu + c_4 & \text{si } \mu < y \end{cases} \quad (3.45)$$

Se evalúan las condiciones de frontera dadas que fueron establecidas por las Ecs. (3.39), y se tiene:

$$G(\mu, y) = \begin{cases} c_2 & \text{Si } \mu > y \\ c_3 \mu & \text{Si } \mu < y \end{cases} \quad (3.46)$$

Para determinar las constantes c_2 y c_3 se imponen dos condiciones adicionales, la primera de ellas surge del hecho que el campo de concentraciones es continuo en $\mu = y$, por lo cual

$$G(y^+, y) = G(y^-, y) \quad (3.47)$$

y la otra surge al integrar las Ec. (3.44) en el dominio $\mu = y^+$ y $\mu = y^-$

$$\left. \frac{\partial G(\mu, y)}{\partial \mu} \right|_{\mu=y^+} - \left. \frac{\partial G(\mu, y)}{\partial \mu} \right|_{\mu=y^-} = 1 \quad (3.48)$$

Así, después de evaluar las condiciones dadas por las Ecs. (3.47) y (3.48) se obtiene la función de Green, la cual queda como se muestra:

$$G(\mu, y) = \begin{cases} -y & \text{Si } \mu > y \\ -\mu & \text{Si } \mu < y \end{cases} \quad (3.49)$$

Al evaluar la función en la Ec. (3.43), resulta:

$$C_p(y, t) = C_f(x) + \int_0^{L_y} G(\mu, y) \vartheta(\mu, t) d\mu \quad (3.50)$$

Por lo tanto, la formulación integral de las Ecs. (3.33) y (3.34), esta descrita por las Ecs. (3.49) y (3.50).

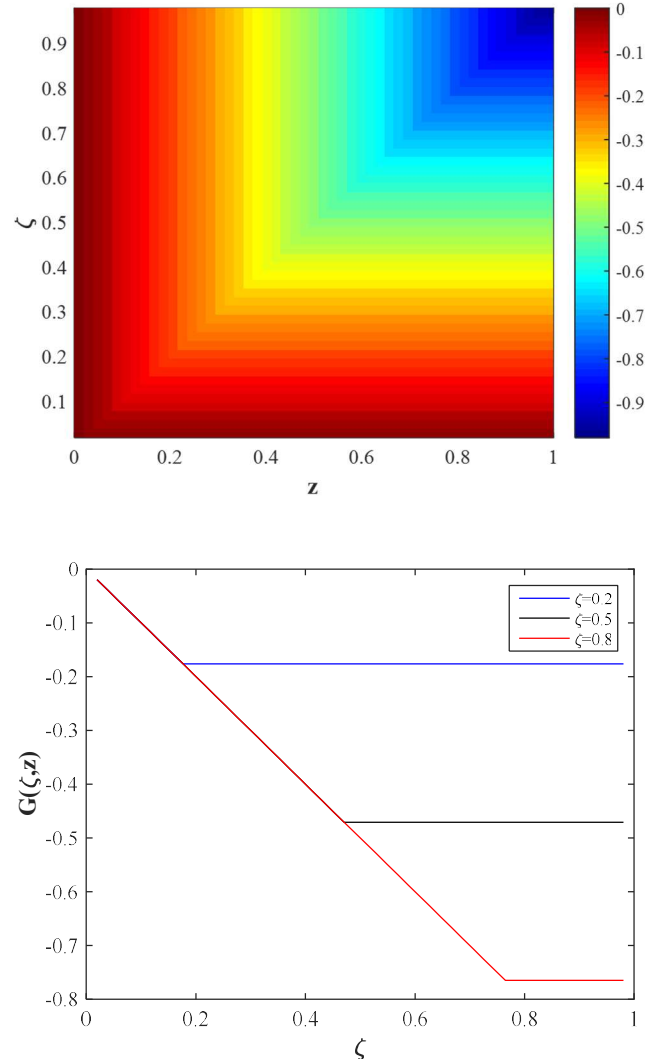


Figura 3-3. Representación de la función de Green para el sistema reacción difusión.

La propagación de la función de Green se representa en la Figura 3.4 donde se observa cómo se distribuye la función en el dominio. La función de Green representa la propagación del operador difusivo.

Capítulo 4

Resultados y Discusión

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos con la formulación integral para las diferentes etapas del modelo que describe la prueba de trazadores. Para identificar los parámetros relevantes se consideran los dos casos por separado, la matriz porosa que se representa por la ecuación reacción-difusión y la fractura representada por la ecuación reacción-difusión convección. Finalmente, en la última parte del capítulo se analiza el modelo completo acoplando la matriz porosa con la fractura, bajo diferentes condiciones de inyección del trazador. Los resultados son comparados con los obtenidos mediante esquemas tradicionales de diferencias finitas.

4.1 Sistema reacción-difusión: Matriz porosa

Como se describió en la sección 3.2, el modelo simplificado idealizado de la prueba de trazadores se compone del modelo de la matriz porosa donde se tiene almacenado el hidrocarburo acoplado al modelo de una fractura. Para analizar los resultados numéricos, en este apartado se evaluará mediante es esquema de la formulación integral la dinámica de la matriz porosa, considerando dos tipos de condiciones de frontera, i) concentración del trazador conocida en la frontera con la fractura y ii) condición de frontera variable. Así mismo, se evaluará el efecto de la reacción química para diferentes valores de la constante de reacción para una cinética de primer orden.

Considerando el modelo descrito en la Ec. (3.2) con longitud adimensional ($z \in [0,1]$), $D_m=0.1\text{m}^2/\text{h}$ y cuatro valores de la constante de reacción $k=0, 0.01, 0.1$ y 1.0 h^{-1} , la Figura 4.1 muestra el perfil de concentración espacio-temporal calculado usando 100 nodos de malla. Manteniendo la concentración del trazador constante en la frontera, permite alcanzar el estado estacionario, el cual dependiendo el valor de k , se observa lo siguiente:

- a) Si no hay reacción química ($k=0$) se puede notar que en el estado estacionario, la matriz se llena con el trazador, alcanzando una concentración igual que la

frontera en todo el dominio (Figura 4.2a). El tiempo de llenado de la matriz dependerá de la facilidad de transporte del trazador en el medio poroso, i.e., depende del coeficiente de difusión D_m .

- b) A medida que la reacción tiene mayor influencia en el sistema, se alcanza más rápido el estado estacionario y al mismo tiempo disminuye la concentración que se puede alcanzar en la frontera de la matriz, $z=1.0$ (Figura 4.2b-d). Esto debido a que el trazador alimentado en la matriz se consume a medida que se transporta en el medio poroso. Es importante notar que si se requiere que el trazador alcance todo el dominio de la matriz porosa, es necesario considerar un fluido con velocidad de reacción muy lenta ($k < 0.01$), o bien que no esté limitado el transporte difusivo.

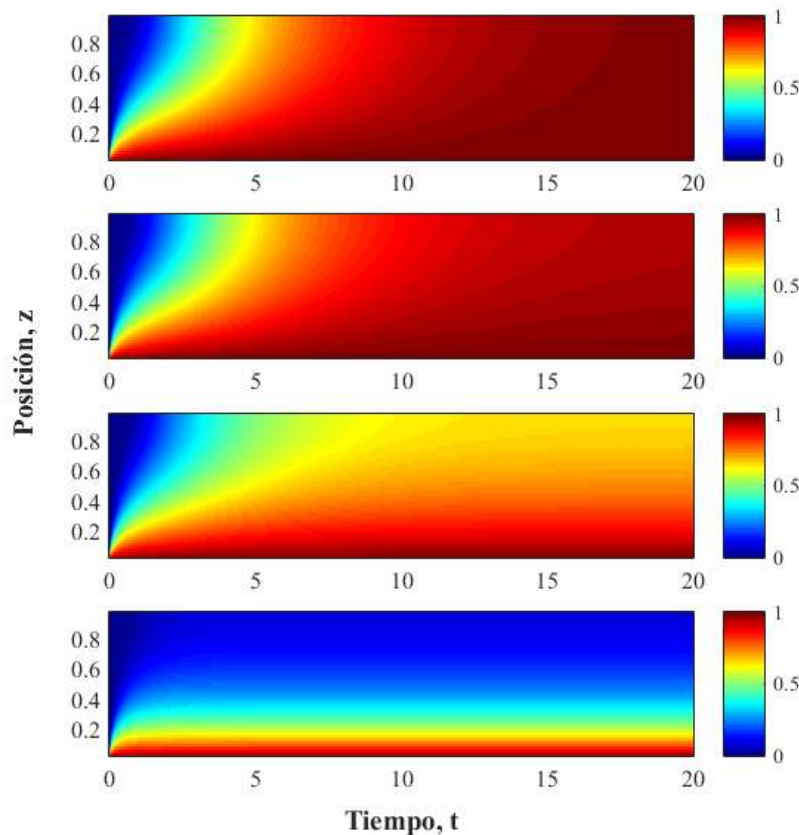


Figura 4-1. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la matriz porosa, a) $k=0$, b) $k=0.01$, c) $k=0.1$ y d) $k=1.0 \text{ h}^{-1}$

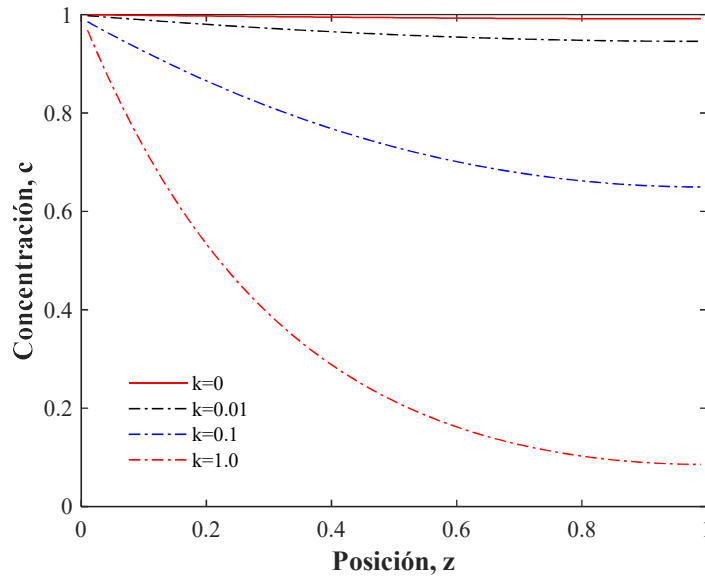


Figura 4-2. Perfil de concentración sobre el dominio de la matriz porosa a $t=20h$ de simulación.

Para evaluar el desempeño numérico del esquema FEI comparado con el esquema de diferencias finitas, se propone resolver el modelo reacción-difusión (Ec. 3.2) en estado estacionario, considerando diferente número de nodos, de 10 a 1000 nodos. Se calcula el error relativo usando como referencia el perfil calculado con elemento finito (Comsol Multiphysic) usando 4000 nodos. El error relativo se obtiene como sigue:

$$E_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{c_r - c_n}{c_r} \quad (4.1)$$

donde N es el número de nodos, c_r es la concentración de referencia calculada con Comsol Multiphysics y c_n es la concentración calculada con el esquema de DF y FEI. La Figura 4.3 muestra el error relativo de ambos esquemas numéricos, donde en términos generales se puede apreciar que las FEI exhiben menor error relativo que el esquema de DF. El error de aproximación que presenta la formulación integral, alcanza hasta 5 órdenes de magnitud menor que los obtenidos por diferencias finitas. Esto es debido a que el orden de aproximación de las FEI es de h^2 , mientras que el orden de aproximación de DF es de h (Hernandez-Martinez y col., 2008). Es relevante comentar que la diferencia entre los errores relativos disminuye cuando la reacción química toma mayor relevancia en el proceso, es decir, cuando incrementa el valor de k . Es bien conocido que el esquema integral es una inversión del operador diferencial al operador integral que permite incorporar las condiciones de frontera sin una discretización previa (Valdes-Parada y col., 2007; Hernandez-Martinez, 2011). En el modelo de la prueba de trazadores en la matriz porosa el operador diferencial solo corresponde al transporte difusivo, por lo que cuando la difusión es el proceso dominante, la formulación integral exhibe mejor desempeño

numérico. Por lo que, cuando disminuye la contribución difusiva (la reacción química domina el proceso) el desempeño numérico se acerca al observado por el esquema de DF

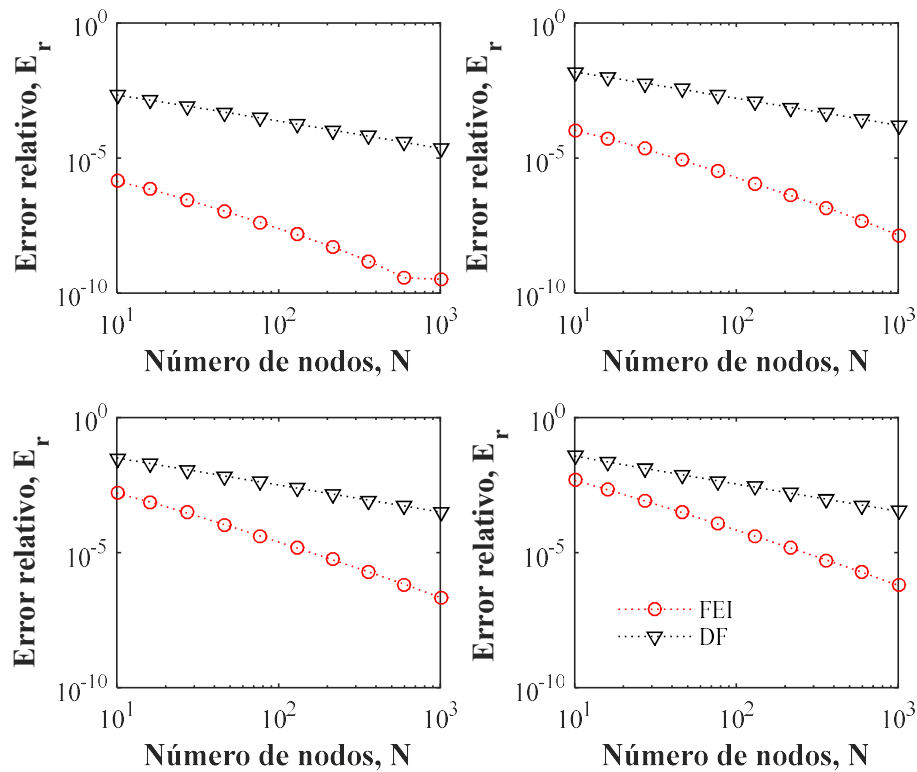


Figura 4-3. Error relativo calculado para diferentes nodos de la formulación integral y diferencias finitas, a) $k=0$, b) $k=0.01$, $k=0.1$ y d) $k=1.0$.

En general, las pruebas de trazadores se realizan en medios con reacciones químicas lentas, o en medios sin reacción química, lo que sugiere que las FEI, son una alternativa viable para la solución numérica de modelos de trazadores en medios porosos. En ese sentido, para analizar las consideraciones físicas del modelo se proponen dos tipos de condiciones de frontera, constante y como función del tiempo, a diferentes valores de la constante cinética. Además, para evaluar la propagación del trazador se considera dos etapas en la inyección del trazador.

La Figura 4.4 muestra el perfil espacio-temporal de la concentración del trazador para cuatro valores de k , donde se muestra que la frontera de la matriz porosa en $z=0$ mantiene una concentración constante del trazador durante 20h, y posterior a eso se asume que la frontera no permite inyección de trazador, o en otras palabras no se permite el flujo de trazador en la frontera.

Asumiendo que no hay reacción química ($k=0$) se observa en la Figura 4.4a que el trazador se inyecta en las primeras 20 horas y se propaga hasta cubrir todo el dominio de la matriz porosa. Después de la inyección se observa que el trazador se propaga en todo el dominio y no se consume, alcanzando un estado estacionario en $c=1\text{mol/m}^3$. Considerando la dinámica de la concentración del trazador en una posición espacial de la matriz, la Figura 4.5 se muestra la dinámica del trazador en $z=0.5$, donde se observa que para $k=0$, la matriz porosa inicia en concentración cero y al tiempo 20h alcanza un valor de uno, que se mantiene en todo tiempo.

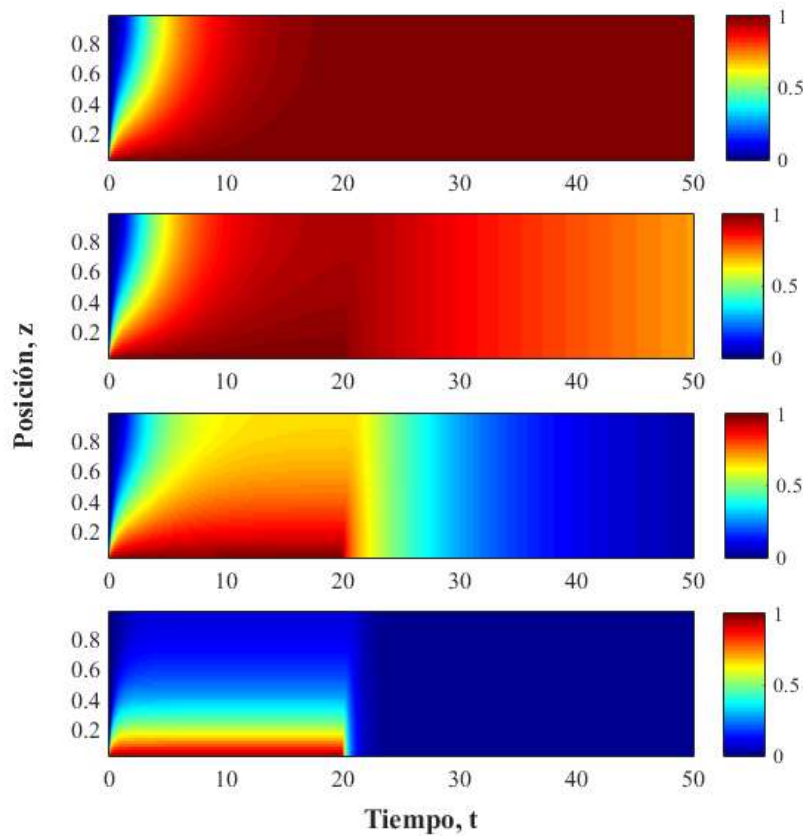


Figura 4-4. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la matriz porosa con dos condiciones de frontera para a) $k=0$, b) $k=0.01$, c) $k=0.1$ y d) $k=1.0\text{h}^{-1}$

Por otro lado, para el caso cuando está presente la reacción química, las Figuras 4.4b-d muestran que la propagación del trazado en la matriz depende de la influencia de la reacción química, a medida que incrementa el valor de k se puede observar que el trazador se consume a medida que es inyectado a la matriz, y cuando deja de inyectarse, la concentración del trazador tiende a cero. Esto se puede ilustrar en la Figura 4.5 para $z=0.5$, donde dependiendo del peso de la reacción química el trazador se propaga en la matriz,

alcanza un estado estacionario y cuando se deja de inyectar se consume. La simulación presentada solo es hasta 50 h, pero si se deja un mayor tiempo de simulación se observaría que se consume totalmente el trazador.

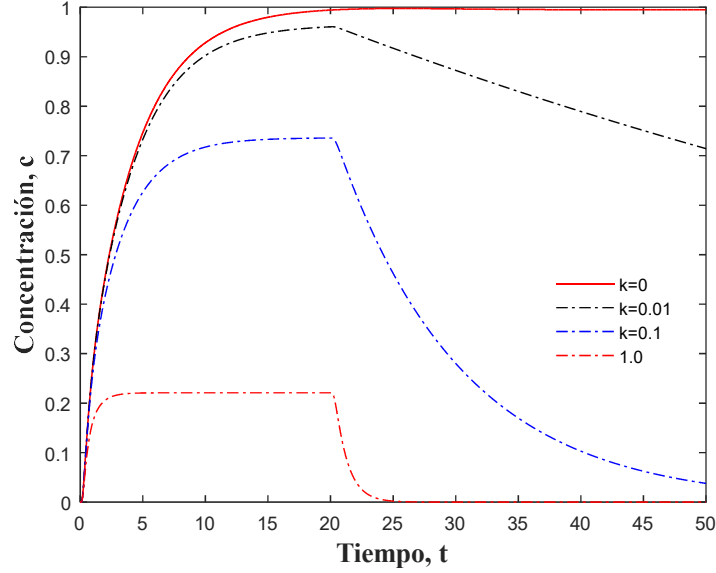


Figura 4-5. Dinámica del trazador en la matriz porosa para inyección constante hasta $t=20h$.

Para observar la dinámica del trazador cuando la inyección es variable, se propone que la condición de frontera acoplada con la fractura ($z=0$) como una función del tiempo, tal que

$$c = \begin{cases} \sigma t \left(\delta - \frac{t}{t_i} \right) / t_i & \text{si } t \leq t_i \\ 0 & \text{si } t > t_i \end{cases} \quad (4.2)$$

donde t_i , δ y σ son constantes. Para $t_i=20$, $\delta=1.0$ y $\sigma=4.0$, la Figura 4.6 muestra el perfil espacio-temporal de la concentración en la matriz porosa. A diferencia de la inyección constante (Figura 4.4), se observa que cantidad de trazador inyectado no alcanza a propagarse en todo el dominio. Específicamente, para el caso sin reacción química, la inyección usando la función descrita por la Ec. (4.2) solo permite alcanzar una concentración promedio de 0.2 mol/m^3 , lo cual se mantiene constante después del tiempo de inyección (Figura 4.7). Para los casos con reacción química, se observa que la concentración después de la inyección es menor a medida que incrementa el valor de la constante cinética. Así mismo, el trazador se consume cuando se deja de inyectar. La velocidad de consumo se muestra más rápida para el caso donde $k=1h^{-1}$.

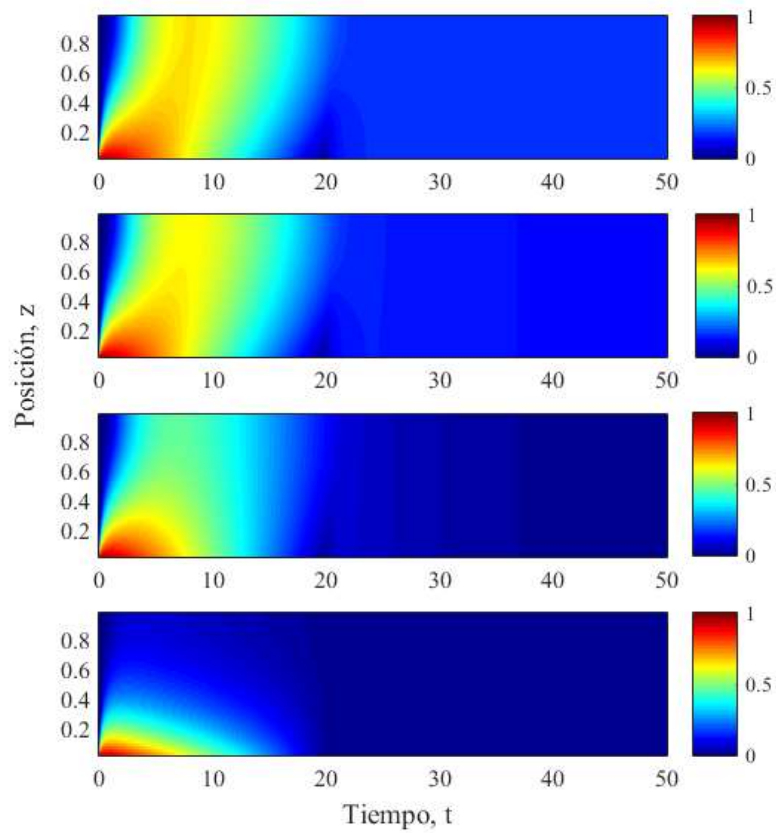


Figura 4-6. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la matriz porosa con condición de frontera variable para a) $k=0$, b) $k=0.01$, $k=0.1$ y d) $k=1.0h^{-1}$

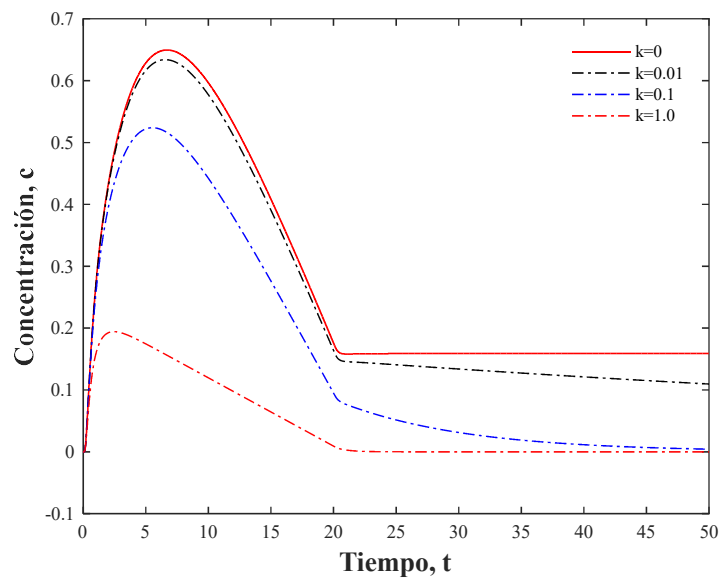


Figura 4-7. Dinámica

del trazador en la matriz porosa para inyección variable hasta $t=20h$.

4.2 Sistema reacción-difusión-convección: Fractura

Para el caso de la fractura, se considera la difusión del trazador constante (como en el caso de la matriz), se deben considerar dos parámetros de gran relevancia que influyen significativamente sobre la dinámica del trazador, la reacción química y la velocidad de inyección del trazador. Como se discutió en la sección 4.1 la reacción química limita la propagación del trazador sobre el dominio, esto es que, a medida que incrementa la reacción tienen mayor impacto en el modelo, el trazador inyectado en la fractura es consumido con mayor rapidez. Por otro lado, la velocidad de inyección es un parámetro que favorece el transporte del trazador en la longitud de la fractura, permitiendo transportar al trazador aún en presencia de la reacción química.

Para ilustrar la dinámica del trazador en la fractura se considera la Ec. (3.1) con una longitud adimensional $x \in [0,1]$ y se consideran diferentes valores de la constante cinética y la velocidad de inyección del trazador.

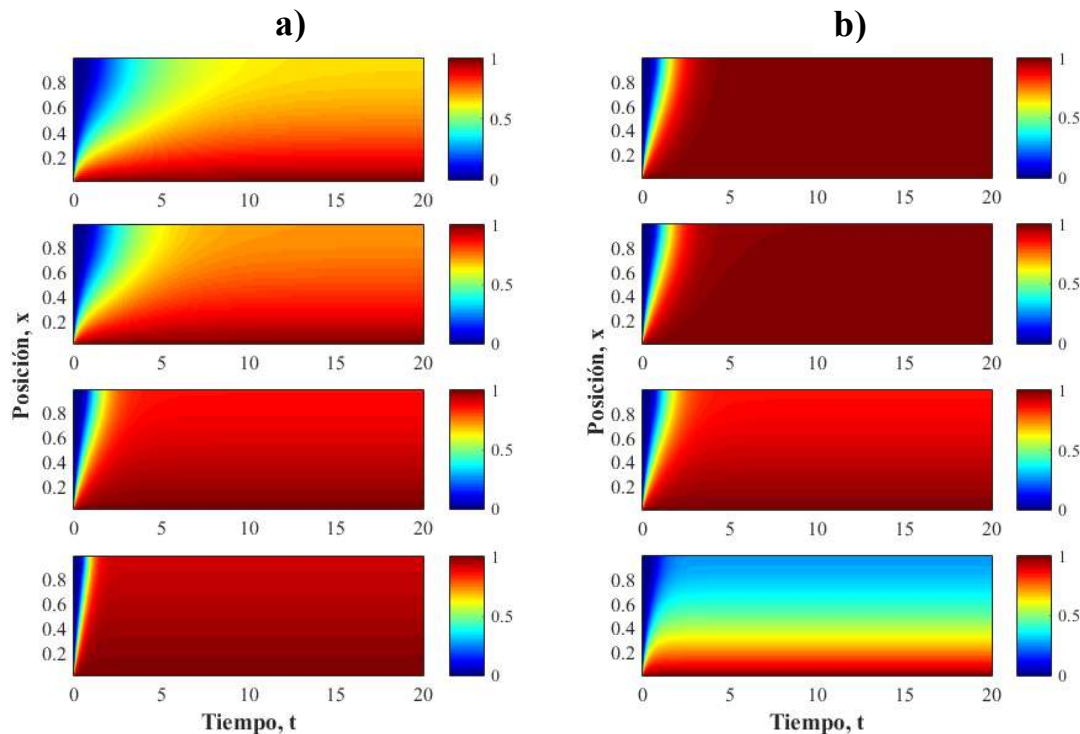


Figura 4-8. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la fractura con variación de a) velocidad de inyección y b) cinética de reacción.

Para un valor constante de $k=0.1h^{-1}$, la Figura 4.8a muestra el efecto de la velocidad de inyección sobre el transporte del trazador en la fractura ($v=0, 0.1, 0.5$ y $1.0m/h$). Se observa que el incremento de velocidad mejora el transporte del trazador, permitiendo propagarse por toda la fractura con concentraciones cerca de uno, aún con presencia de la reacción química. De hecho, para $v=1.0$, la concentración en el estado estacionario en la posición $z=1$ alcanza valores mayores a 0.9 (Figura 4.9a).

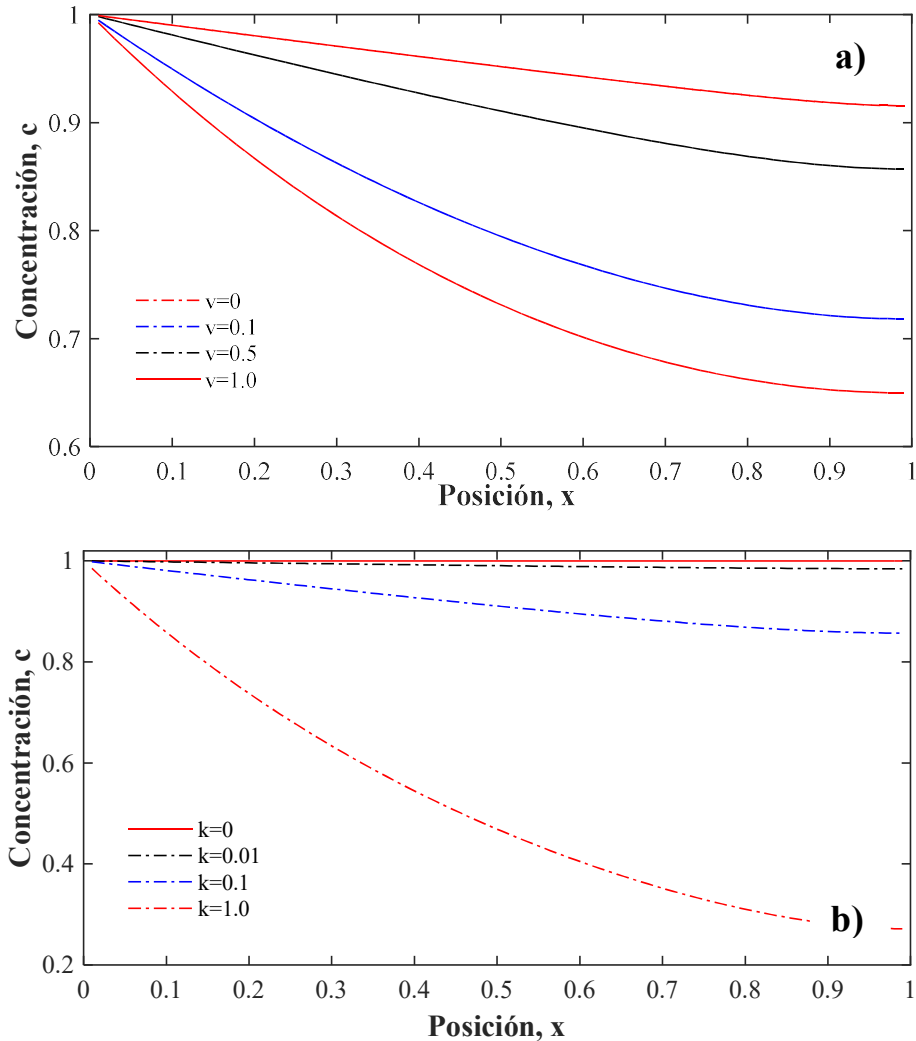


Figura 4-9. Perfil de concentración de la fractura como función de la posición en $t=20h$.

Considerando $v=0.5$, la Figura 4.8b y 4.9b muestran el efecto de la reacción química ($k=0, 0.01, 0.1$ y 1.0) donde se muestra que el transporte del trazador se limita mediante la reacción, este parámetro es más importante. Por ejemplo, para $k=1.0$ se alcanza un estado estacionario donde la concentración del trazador se reduce aproximadamente a $0.3mol/m^3$.

Para evaluar el desempeño numérico de la metodología propuesta, se resuelve el modelo de reacción-difusión-convección usando diferente número de nodos (de 10 a 1000) y se calcula el error relativo con la Ec. 4.1. Considerando el efecto de la velocidad de inyección del trazador, la Figura 4.10 muestra el error relativo calculado para diferentes valores de velocidad. Se observa que el incremento de velocidad no merma el desempeño numérico de la FEI manteniendo el error por debajo que las DF hasta 4 órdenes de magnitud.

Nótese que la función de Green (Ec. 3.33) considera la velocidad del trazador, el cual si incrementa el esquema integral permite amortiguar su efecto, permitiendo una solución más estable. Esta propiedad permite al esquema integral evaluar valores velocidad grande ($v \gg 1$) sin perder el orden de aproximación (Valdes-Parada y col., 2009; Hernandez-Martinez y col., 2010). Cabe mencionar que la FEI no requiere de la discretización del operador convectivo conservando el orden de aproximación de h^2 , mientras que para el esquema de DF es necesario hacer la discretización del operador convectivo, el cual para modelos de convección dominante se sugiere diferencias hacia adelante que reducen el orden de aproximación.

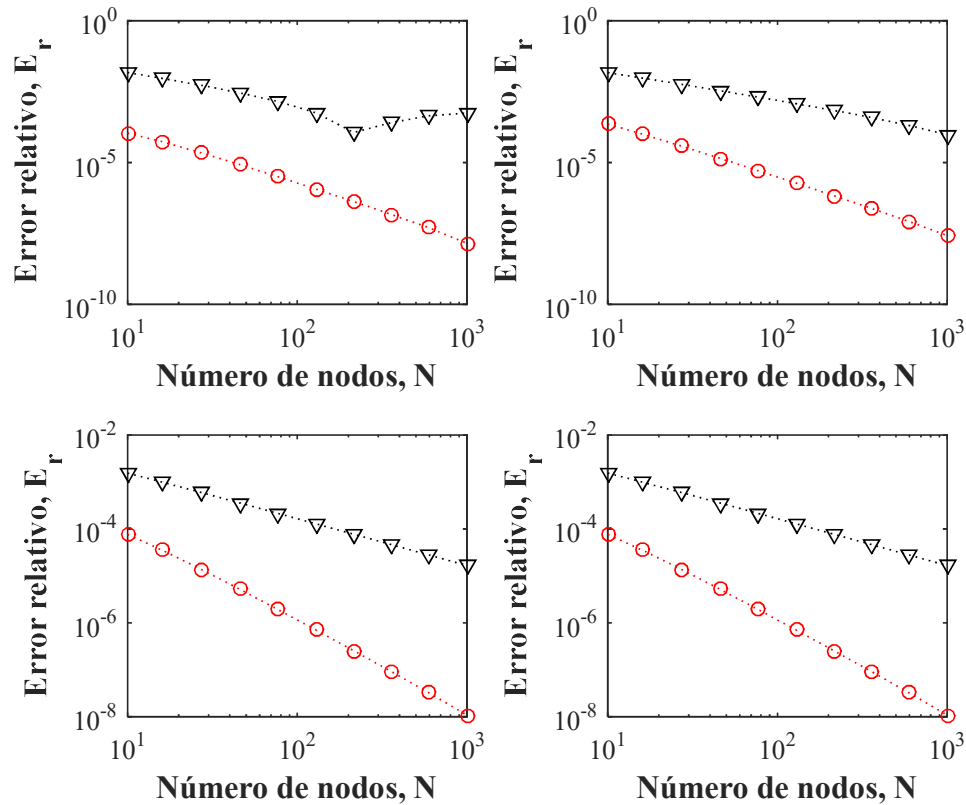


Figura 4-10. Error relativo calculado para el modelo de la fractura usando diferentes nodos de la formulación integral y diferencias finitas, a) $v=0$, b) $v=0.1$, $v=0.5$ y d) $v=1.0$.

Los resultados de la evaluación del modelo reacción-difusión-convectivo con velocidad constante y variación de la cinética de reacción, coinciden con los reportados en el caso reacción difusión (Figura 4.11). Se puede observar que la FEI presenta errores relativos de alcanza hasta 4 órdenes de magnitud menores que el esquema de diferencias, y a pesar de que la diferencia se acorta cuando la reacción química incrementa en el proceso, la FEI siempre exhibe menores errores de aproximación.

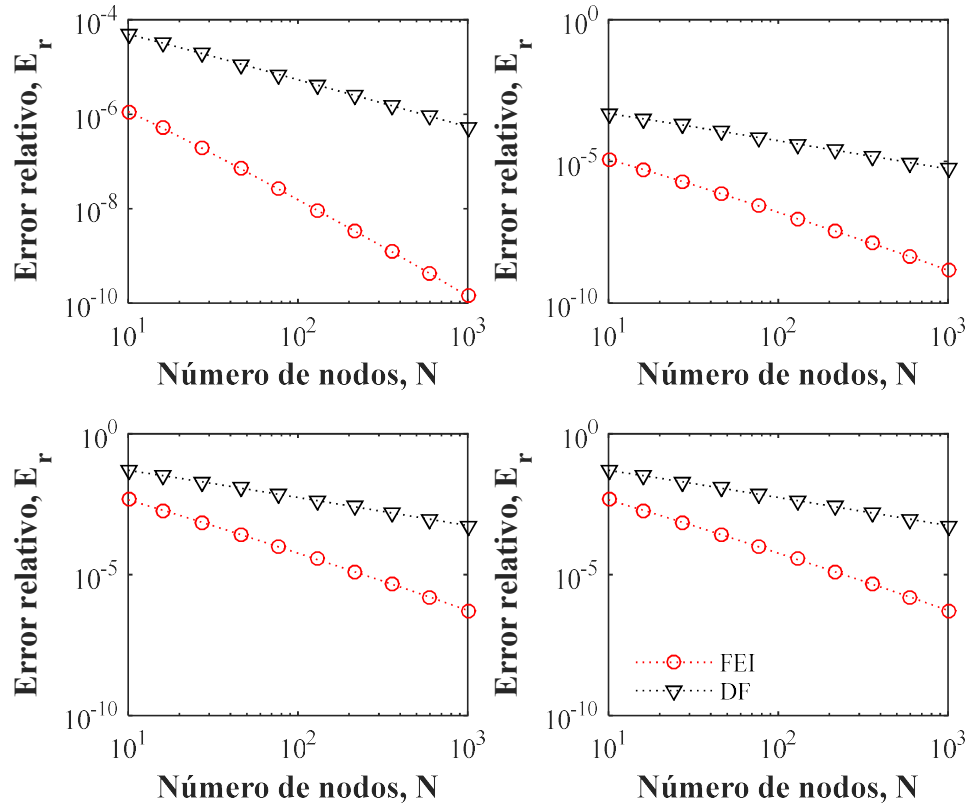


Figura 4-11. Error relativo calculado para el modelo de la fractura usando diferentes nodos de la formulación integral y diferencias finitas, a) $k=0$, b) $k=0.01$, $k=0.1$ y d) $k=1.0$.

La dinámica del transporte del trazador en la fractura se puede observar en la Figura 4.12, donde se consideran cuatro valores de velocidad de inyección del trazador. Para ilustrar el efecto del transporte convectivo, se asumió que no hay presencia de reacción química ($k=0.0$) y el trazador se inyectó en forma continua hasta el $t=5h$, una vez eso se dejó de inyectar, dejando que el trazador se propague en el dominio hasta alcanzar el estado estacionario. El perfil espacio-temporal muestra que la velocidad del trazador en la fractura favorece su distribución en el dominio. La Figura 4.13 muestra los perfiles dinámicos en la posición $x=0.5$, observando que inicialmente la fractura alcanza un estado estacionario donde se alcanza una concentración promedio en todo el dominio.

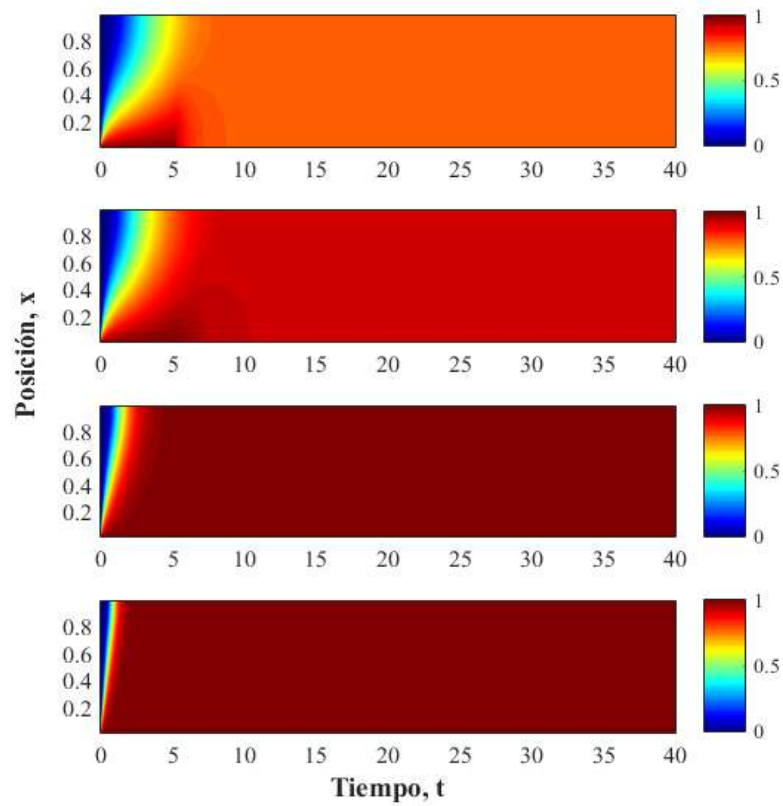


Figura 4-12. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la fractura con inyección constante para a) $v=0$, b) $v=0.1$, $v=0.5$ y d) $v=1.0$ m/h

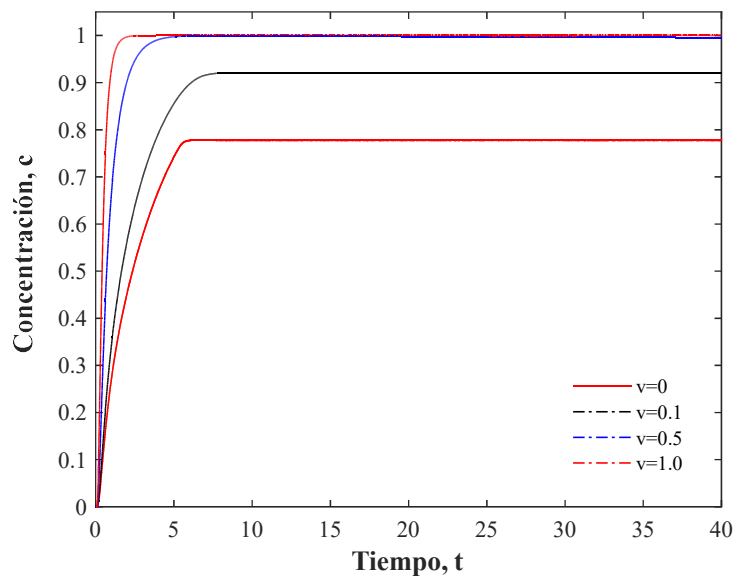


Figura 4-13. Dinámica del trazador en la fractura en $x=0.5$.

Si se considera una inyección de trazador usando la función dada por la Ec. (4.2) el perfil espacio-temporal usando $v=0, 0.1, 0.5$ y 1.0 m/h se muestra en la Figura 4.14. El incremento de velocidad muestra el trazador alcanza la frontera y después se propaga en todo el dominio. Como el caso de inyección constante, cuando la velocidad es mayor se alcanza mayor concentración en el medio.

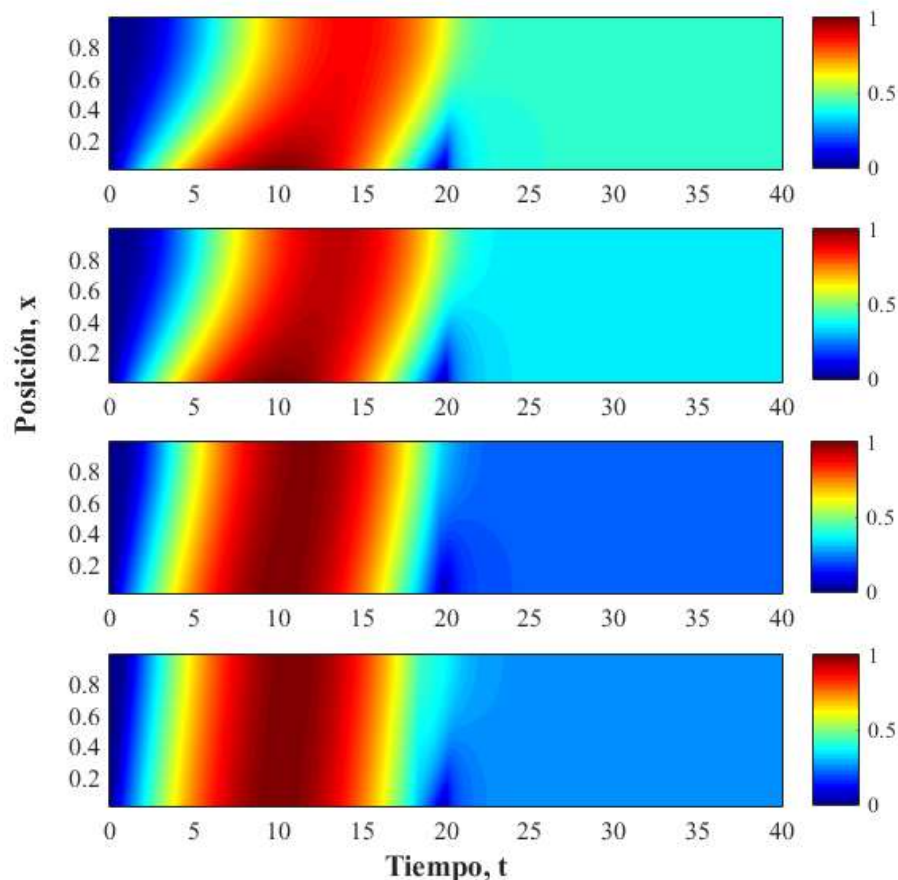


Figura 4-14. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la fractura con inyección constante para a) $v=0$, b) $v=0.1$, $v=0.5$ y d) $v=1.0$ m/h

4.3 Prueba de trazadores: Tres etapas

Para la simulación del modelo de trazador para la fractura acoplada a la matriz porosa, se consideran las tres etapas: inyección, reposo y producción del trazador. Por cuestiones de simplicidad en el análisis del modelo, se consideran las tres etapas para el caso sin reacción química ($k=0$) y dos tipos de inyección, constante y como función del tiempo. El modelo descrito por las Ecs. (3.1)-(3.2) y sus análogos para las etapas 2 y 3 (Ecs. 3.9, 3.10, 3.14 y 3.15), proponen la descripción de la matriz porosa con un modelo unidireccional en la

dirección z , sin embargo la frontera está acoplada al modelo de la fractura en la dirección x . Lo anterior conduce a la solución del modelo de la matriz (Ec. 3.2) para cada nodo del modelo de la fractura, es decir a un modelo bidimensional. Para ilustrar la simulación de la prueba de trazador se considera la solución de la matriz dirección z para cada nodo en x , a diferentes tiempos. Los parámetros usados en la solución del modelo se presentan en la Tabla 3.1 de la sección 3.

4.3.1 Etapa 1: Inyección constante

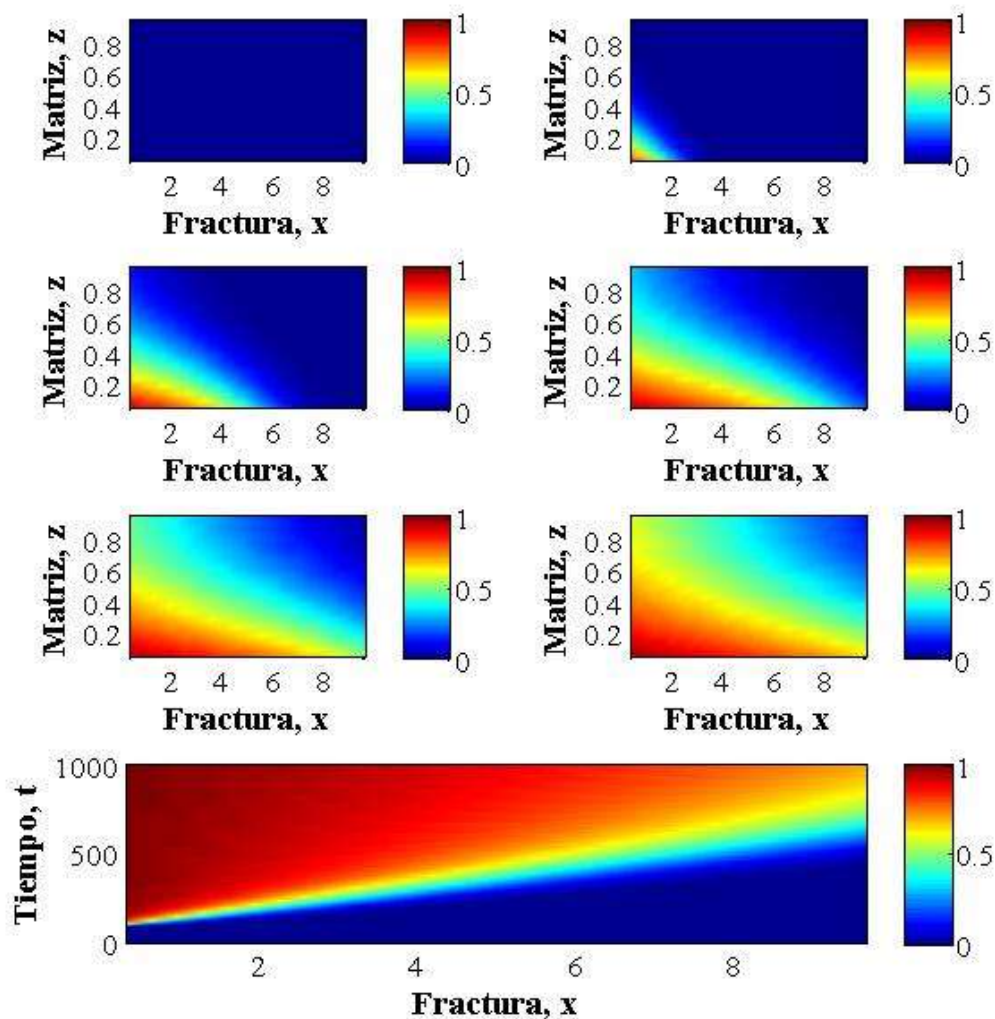


Figura 4-15. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la primera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección constante.

La Figura 4.15 muestra la simulación de la prueba de trazadores en la etapa 1, considerando inyección de trazador en forma constante. Para un tiempo de simulación de 1000h, se muestran seis perfiles de concentración de la matriz, a 0, 200, 400, 600, 800 y 1000 horas de inyección. Se puede notar que inicialmente la matriz y la fractura no tienen trazador, por lo que a tiempo cero la concentración de trazador es cero. La inyección del trazador inicia en $t=100h$ con lo que inicia la propagación del trazador en la fractura y al mismo tiempo se observa que incrementa la concentración de trazador en la matriz, iniciando dicho incremento en la frontera de la fractura $x=0$, donde se inyecta el trazador. La simulación muestra que la concentración del trazador en la matriz incrementa hasta alcanzar valores mayores a 0.7mol/m^3 en la frontera de la fractura $x=10$. Lo anterior se puede observar como mayor claridad en la Figura 4.16a, donde se muestra el perfil de concentración del trazador en la fractura a diferentes tiempos. Es relevante señalar que si se deja mayor tiempo de simulación la concentración en la fractura y en la matriz alcanzarían una concentración de 1mol/m^3 .

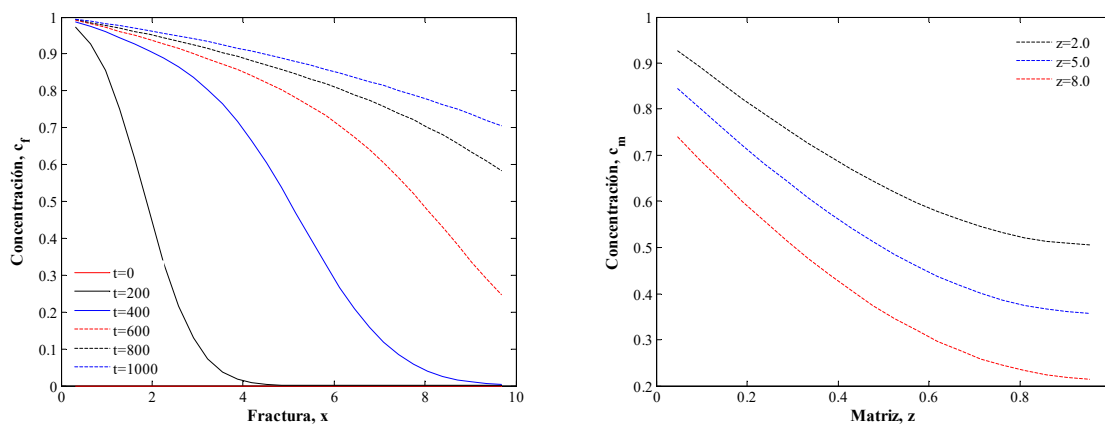


Figura 4-16. Perfil de concentración de la primera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000h$.

Así mismo, para ilustrar la concentración que el trazador alcanza en la matriz, la Figura 4.16b muestra el perfil a diferentes posiciones de la matriz a $t=1000h$. Nótese que la concentración en la frontera con la fractura ($z=0$) la concentración alcanza el valor más alto, el cual corresponde con el observado en el perfil de la fractura (Figura 4.16a).

4.3.2 Etapa 2: Inyección constante

En esta etapa se propone el reposo del trazador en el sistema, eliminando la inyección y cerrando la fractura. Al no existir una reacción química que consuma al trazador y con velocidad cero (sin efectos del transporte convectivo), el trazador se propaga mediante el mecanismo difusivo en ambas secciones. La Figura 4.17 muestra la propagación del

trazador para 8000h, donde se observa que la distribución del trazador en la fractura es cercano a 1mol/m^3 en toda la fractura, mientras que en la matriz la distribución va desde 1mol/m^3 en la frontera con la fractura, hasta valores cercanos a cero en $z=1$. Estas concentraciones se distribuyen notándose que la concentración tiende al mismo valor tanto en la fractura como en la matriz. Es importante resaltar que la simulación a mayor tiempo permitirá alcanzar una concentración homogénea en el sistema.

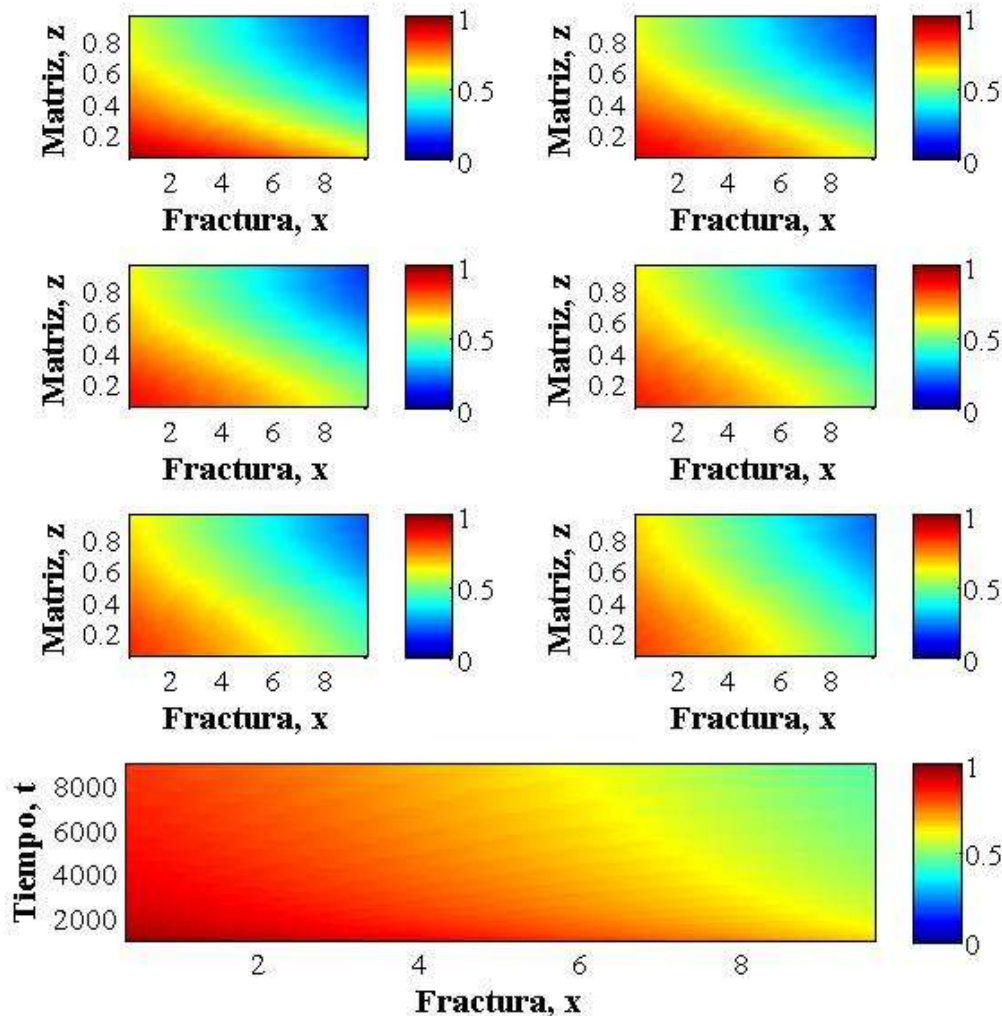


Figura 4-17. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la segunda etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección constante.

La Figura 4.18 muestra como los perfiles de la matriz y la fractura tienden a la misma concentración en el sistema. Esto sugiere que la simulación corresponde con la condición física que se espera en un yacimiento de hidrocarburo. La velocidad de propagación del

trazador depende del coeficiente de difusión promedio, si se incrementa el valor del coeficiente se alcanzaría el estado estacionario con mayor rapidez.

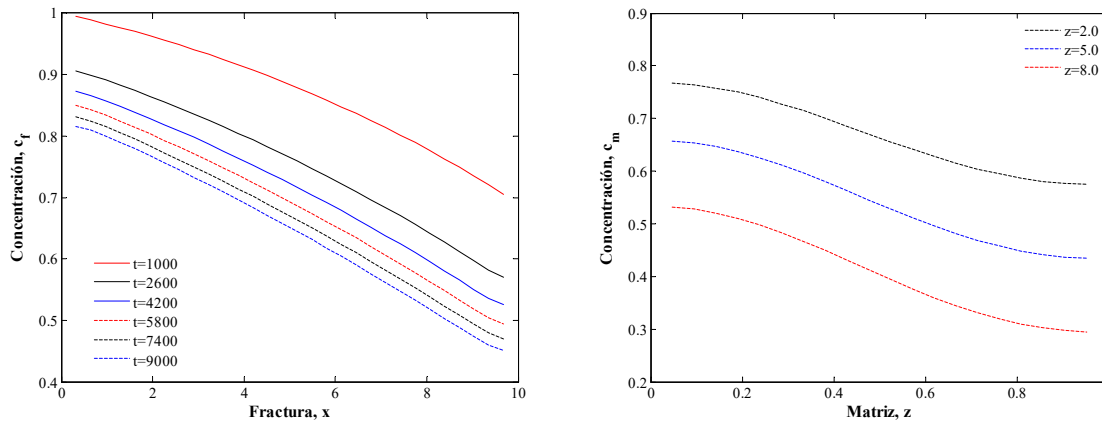


Figura 4-18. Perfil de concentración de la segunda etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000$ h.

4.3.3 Etapa 3: Inyección constante

En la etapa 3 el trazador distribuido en la matriz y en la fractura es succionado, con lo que se espera que la concentración en el sistema disminuya a cero. Para hacer la simulación que permita un flujo en la dirección inversa a la inyección es necesario generar un gradiente de concentración en dirección de la frontera $x=0$, lo cual se consigue con una condición de frontera tipo Robin. La Figura 4.19 muestra los perfiles espacio-temporales de la matriz y la fractura partiendo del tiempo 9000h hasta 10000h. Se puede observar que el perfil de concentración de la matriz a $t=9000$ exhibe concentraciones máximas de 0.8 mol/m^3 en el nodo $x=0$ en la frontera con la fractura, la cual disminuye gradualmente hasta alcanzar valores cercanos a cero a las 1000h de simulación. Así mismo, para $t=10000$, la fractura muestra un perfil de concentración con valores no mayores a 0.2 mol/m^3 (Figura 4.20).

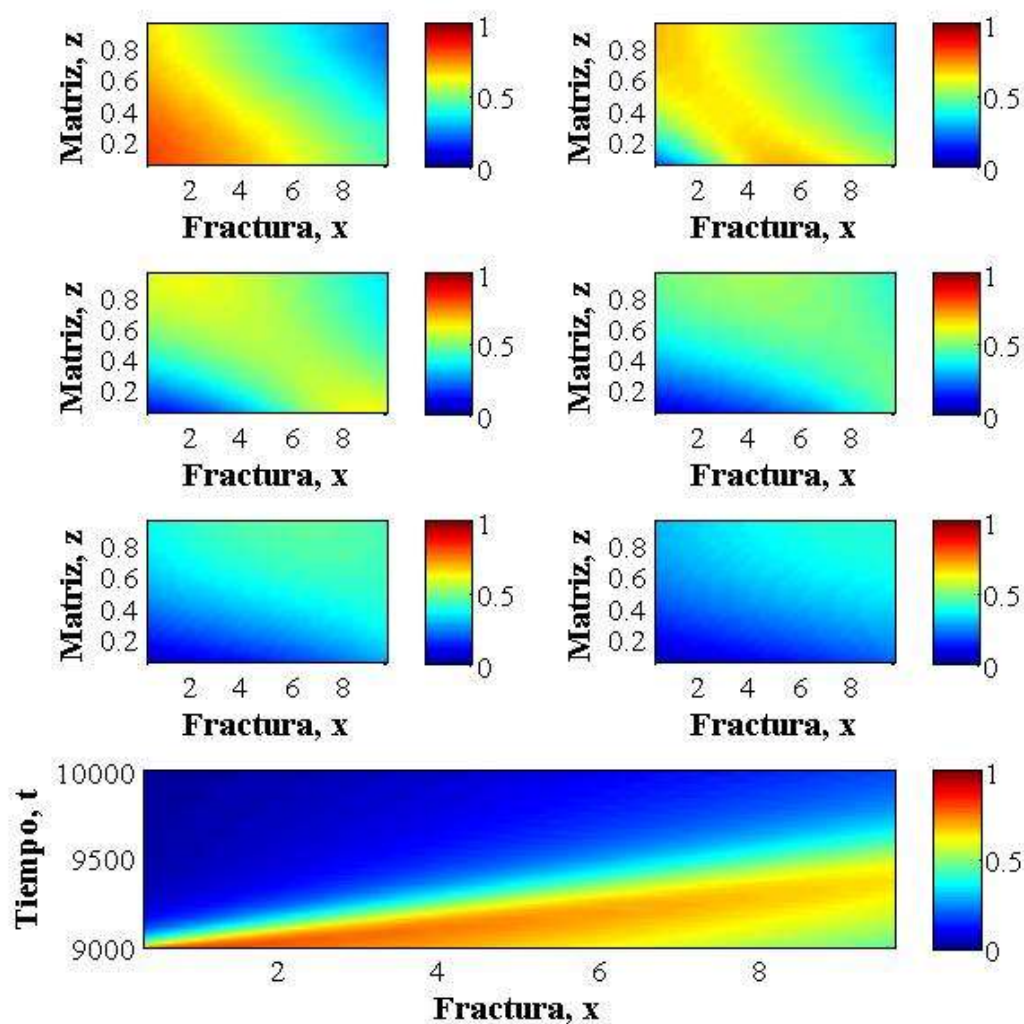


Figura 4-19. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la tercera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección constante.

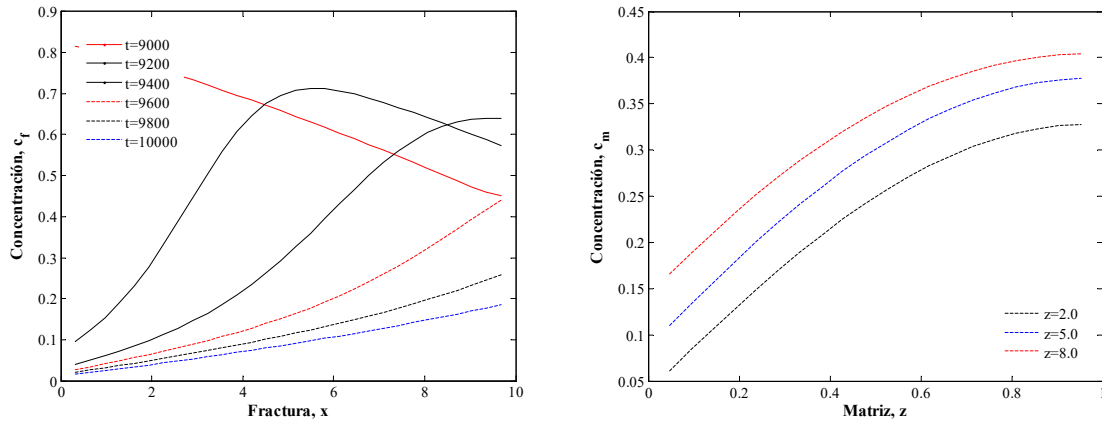


Figura 4-20. Perfil de concentración de la tercera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000h$.

4.3.4 Etapa 1: Inyección variable

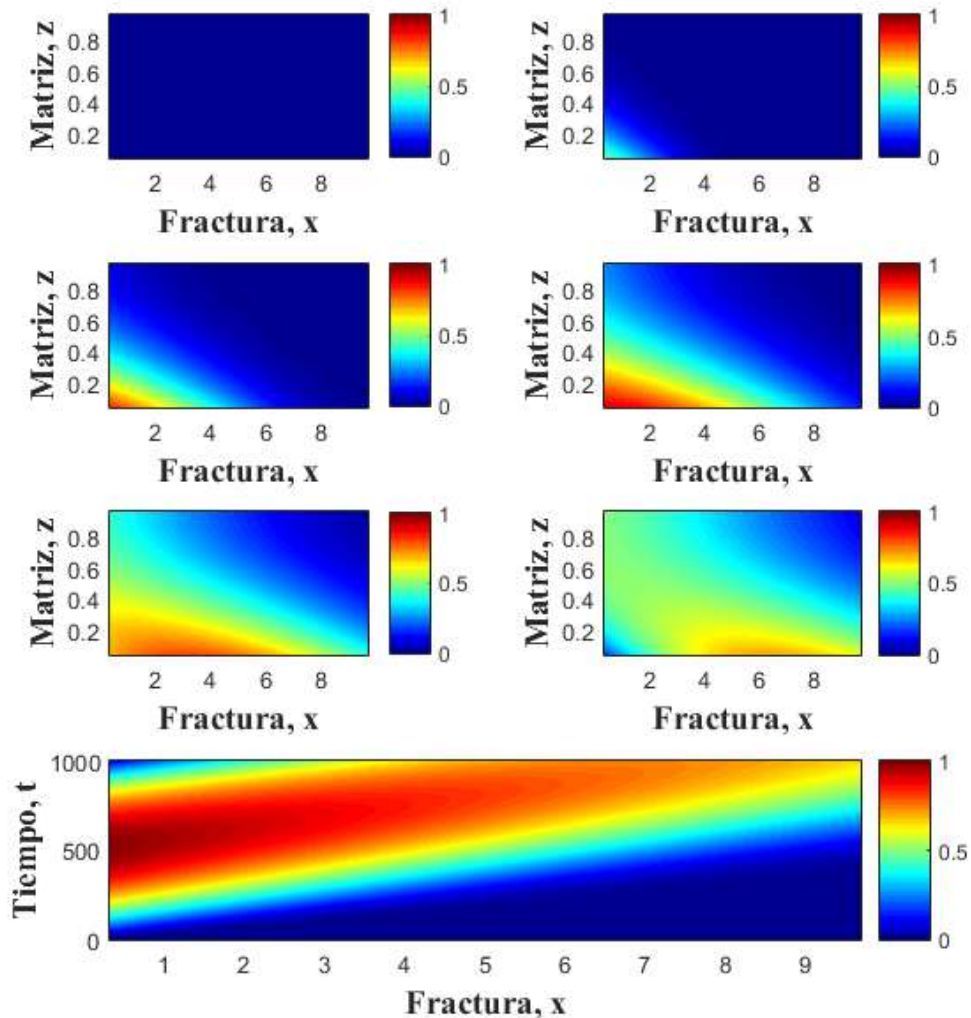


Figura 4-21. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la primera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección variable.

La Figura 4.21 muestra la simulación de la prueba de trazadores en la etapa 1, considerando inyección de trazador en forma variable. Para un tiempo de simulación de 1000h, se muestran seis perfiles de concentración de la matriz, a 0, 200, 400, 600, 800 y 1000 horas de inyección. Se puede ver que al tiempo cero la concentración es cero tanto en la matriz como en la fractura, es decir, no hay trazador. Para un tiempo $t=200h$ la concentración en la frontera matriz-fractura es superior a los 0.5 mol/m^3 . Es notable que a medida que se

aumenta el tiempo de inyección, la concentración aumente y alcanza valores máximos. Sin embargo para el $t=1000h$ se puede notar que nuevamente en la frontera la concentración del trazador disminuye a sus valores mínimos y el máximo se desplaza hacia el nodo $x=6$ en la fractura. Lo anterior se puede observar como mayor claridad en la Figura 4.22a, donde se muestra el perfil de concentración del trazador en la fractura a diferentes tiempos y puede apreciarse que la cresta del valor máximo va desplazándose.

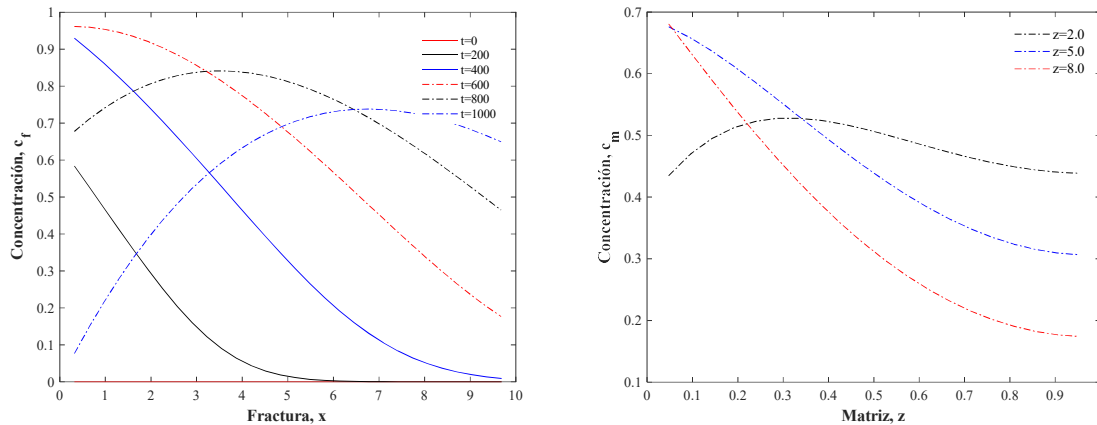


Figura 4-22. Perfil de concentración de la primera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000h$.

4.3.5 Etapa 2: Inyección variable

Esta etapa consiste en parar la inyección y cerrar el yacimiento. El trazador ya no se desplaza por convección, de modo que la velocidad es cero y como tampoco hay reacción química, el trazador se propaga únicamente por difusión en ambas secciones. La Figura 4.23 muestra la propagación del trazador para 8000h, donde se observa que en un tiempo inicial la concentración es casi máxima en la frontera matriz-fractura. También se ve que a lo largo de la fractura, la concentración del trazador va disminuyendo. Cuando el tiempo de reposo aumenta, la concentración a lo largo de la fractura tiende a un valor de 0.5 mol/m^3 . Para un tiempo mayor de reposo, se observa que la concentración tiende a no cambiar, aunque no llega a ser homogénea. Esta tendencia a un valor medio de concentración se aprecia mejor en la figura 4.24 a. En general, no se alcanzan valores máximos de concentración, solo se estabiliza el valor de la concentración con el tiempo.

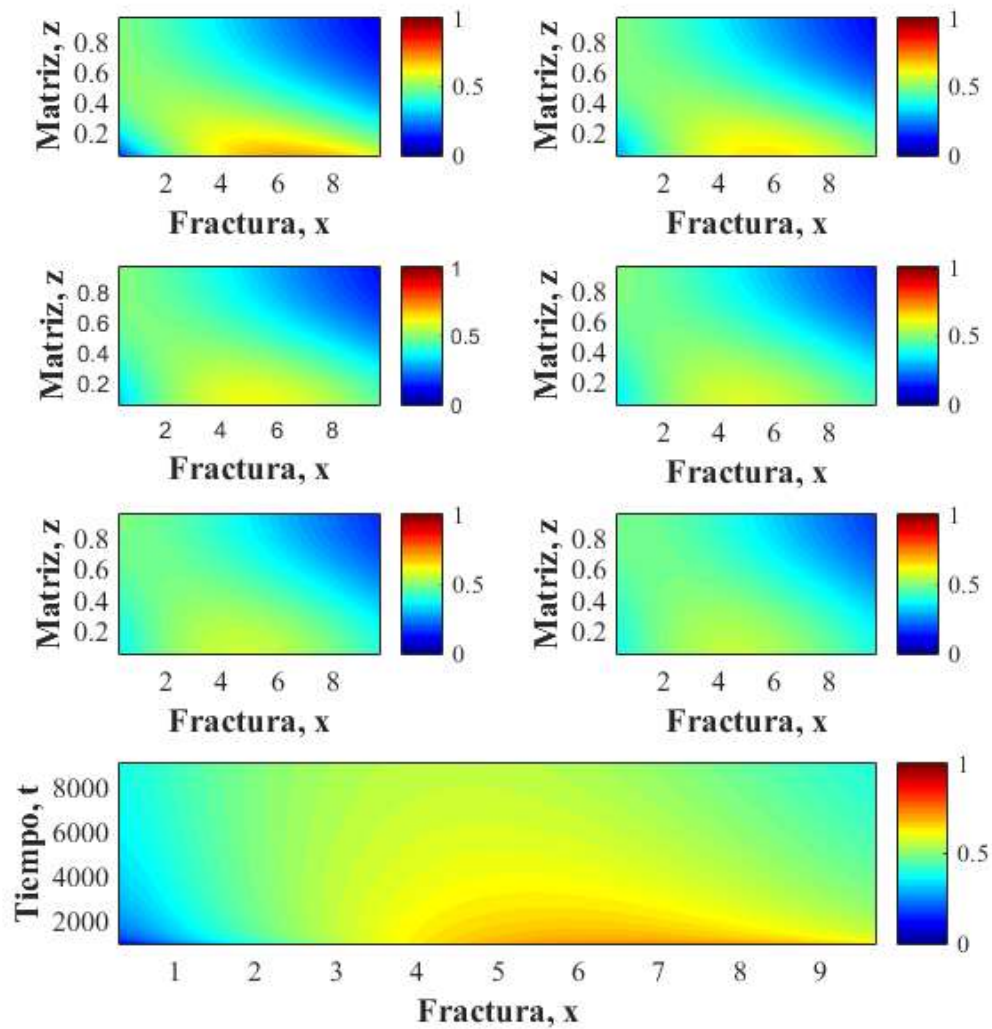


Figura 4-23. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la segunda etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección variable.

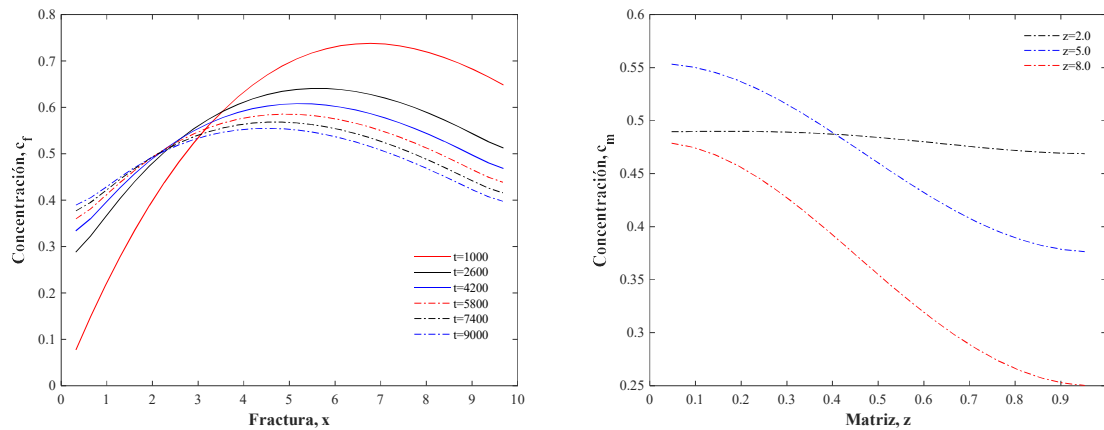


Figura 4-24. Perfil de concentración de la segunda etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000$ h.

4.3.6 Etapa 3: Inyección variable

En la etapa 3 el trazador distribuido en la matriz y en la fractura se extrae, por lo que la concentración en el sistema disminuirá hasta llegar a cero. Se parte de un tiempo inicial $t=9,000$ hasta un $t=10,000$. Se observa en un tiempo inicial que la concentración en la frontera matriz-fractura es casi homogénea con un valor de 0.5 mol/m^3 . A medida que se recupera el trazador, va disminuyendo este valor, primero en el nodo $x=0$ que es el punto donde se realiza la extracción. A lo largo del tiempo la concentración va disminuyendo hasta que el sistema se encuentra sin trazador. Esto se puede apreciar en la figura 4.25b, observando el nodo $x=0$, que casi es el primero en vaciarse. En la figura 4.26a también se puede observar esta tendencia.

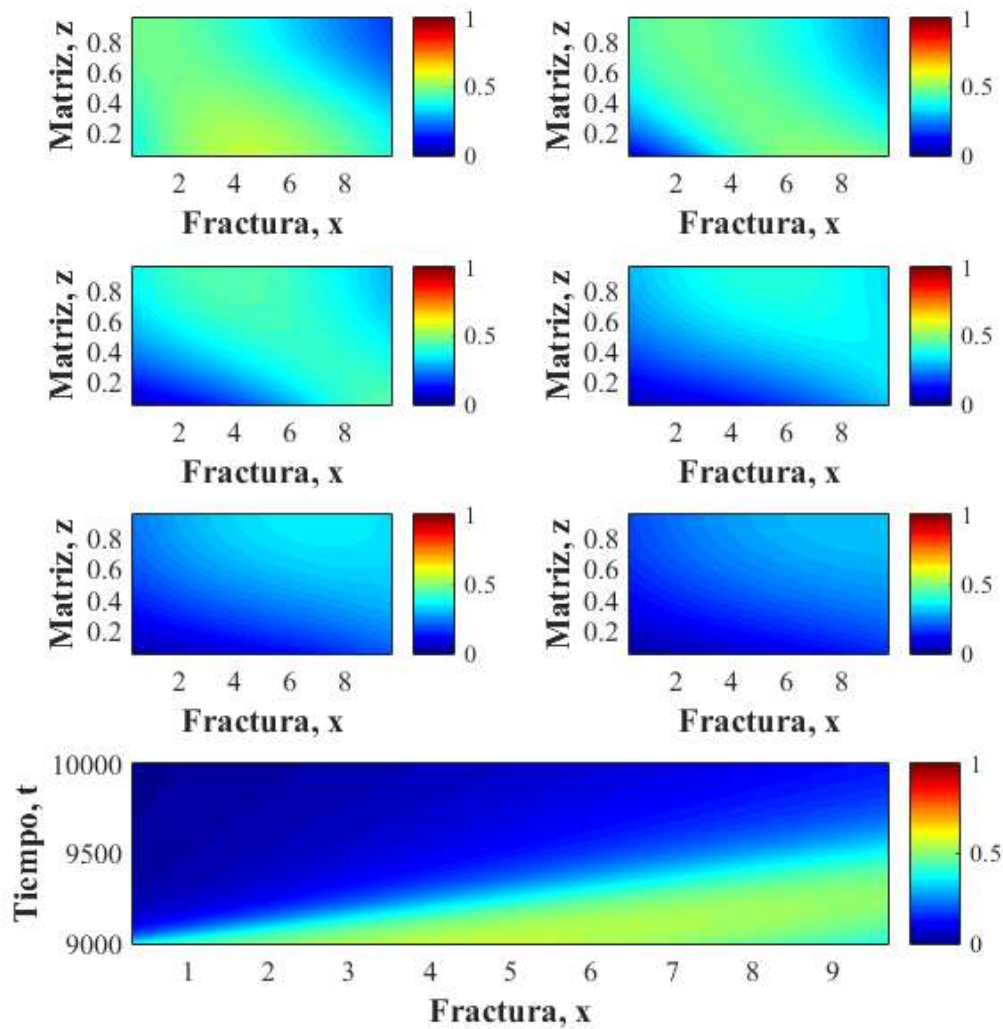


Figura 4-25. Perfil espacio-temporal del modelo de trazador en la tercera etapa para la matriz a diferentes tiempos de simulación, a) $t=0$, b) $t=200$, c) $t=400$, d) $t=600$, e) $t=800$, f) $t=1000$ y la fractura con inyección variable.

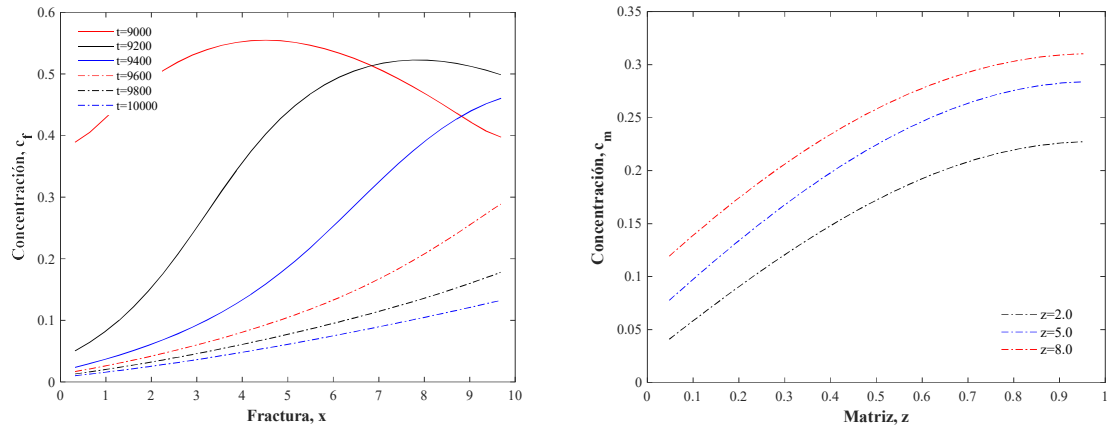


Figura 4-26. Perfil de concentración de la tercera etapa, a) fractura para diferentes tiempos de simulación y b) matriz a $t=1000h$.

Referencias

- Aeby, P., Schultze, U., Braichotte, D., Bundt, M., Moser-Boroumand, F., Wydler, H., & Flühler, H. (2001). Fluorescence imaging of tracer distributions in soil profiles. *Environmental science & technology*, 35(4), 753-760.
- Al-Ghamdi, A., & Ershaghi, I. (1996). Pressure transient analysis of dually fractured reservoirs. *SPE Journal*, 1(01), 93-100.
- Alvarez-Ramirez, J., Valdes-Parada, F. J., Alvarez, J., & Ochoa-Tapia, J. A. (2007). A Green's function formulation for finite-differences schemes. *Chemical Engineering Science*, 62(12), 3083-3091.
- Alvarez-Ramirez, J., & Valdes-Parada, F. J. (2009). Non-standard finite-differences schemes for generalized reaction–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 334-343.
- Arbogast, T., & Wheeler, M. F. (1995). A characteristics-mixed finite element method for advection-dominated transport problems. *SIAM Journal on Numerical analysis*, 32(2), 404-424.
- Berkowitz, B. (2002). Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review. *Advances in water resources*, 25(8), 861-884.
- Bourdet, D., Ayoub, J. A., & Pirard, Y. M. (1989). Use of pressure derivative in well test interpretation. *SPE Formation Evaluation*, 4(02), 293-302.
- Chase Jr, C. (1971). Finite Element Analysis of Single Well Backflow Tracer Test in a Homogeneous Reservoir. In Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME. Society of Petroleum Engineers.
- Coronado, M., & Ramírez-Sabag, J. (2008). Analytical model for tracer transport in reservoirs having a conductive geological fault. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 62(3), 73-79.
- Coronado, M., Ramírez-Sabag, J., Valdiviezo-Mijangos, O., & Somaruga, C. (2009). A test of the effect of boundary conditions on the use of tracers in reservoir characterization. *Geofísica internacional*, 48(2), 185-193.
- Coronado, M., Ramírez-Sabag, J., & Valdiviezo-Mijangos, O. (2011). Double-porosity model for tracer transport in reservoirs having open conductive geological faults: Determination of the fault orientation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 78(1), 65-77.

- Coronado, M., Ramírez-Sabag, J., & Valdiviezo-Mijangos, O. (2012). Inter-well tracer test models for underground formations having conductive faults: development of a numerical model and comparison against analytical models. *Mathematical and Numerical Modeling in Porous Media: Applications in Geosciences*, 97.
- Dargush, G. F., & Banerjee, P. K. (1990). Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity. *International journal of solids and structures*, 26(2), 199-216.
- Datta-Gupta, A., & King, M. J. (1995). A semianalytic approach to tracer flow modeling in heterogeneous permeable media. *Advances in Water Resources*, 18(1), 9-24.
- De Hoog, F. R., Knight, J. H., & Stokes, A. N. (1982). An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(3), 357-366.
- Dixit, R. S., & Tavlarides, L. L. (1982). Integral method of analysis of fischer-tropsch synthesis reactions in a catalyst pellet. *Chemical Engineering Science*, 37(4), 539-544.
- Duffin, R. J., & McWhirter, J. H. (1975). An integral equation formulation of Maxwell's equations. *Journal of the Franklin Institute*, 298(5), 385-394.
- Finlayson, B. A. (1980). Orthogonal collocation on finite elements—progress and potential. *Mathematics and Computers in simulation*, 22(1), 11-17.
- Guvanasen, V., & Guvanasen, V. M. (1987). An approximate semianalytical solution for tracer injection tests in a confined aquifer with a radially converging flow field and finite volume of tracer and chase fluid. *Water Resources Research*, 23(8), 1607-1619.
- Granet, S., Fabrie, P., Lemonnier, P., & Quintard, M. (2001). A two-phase flow simulation of a fractured reservoir using a new fissure element method. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 32(1), 35-52.
- Hernandez-Coronado, H., Coronado, M., & Herrera-Hernandez, E. C. (2012). Transport in fractal media: An effective scale-invariant approach. *Physical Review E*, 85(6), 066316.
- Hernández-Martínez, E., Valdés-Parada, F. J., & Alvarez-Ramírez, J. (2011). Formulaciones integrales para ecuaciones reacción-difusión generalizadas. *Revista mexicana de ingeniería química*, 10(3), 363-371.
- Hernandez-Martinez, E., Alvarez-Ramirez, J., Valdes-Parada, F. J., & Puebla, H. (2011). An integral formulation approach for numerical solution of tubular reactors models. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 9(1).

- Hernandez-Martinez, E., Valdes-Parada, F. J., & Alvarez-Ramirez, J. (2011). A Green's function formulation of nonlocal finite-difference schemes for reaction–diffusion equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 235(9), 3096-3103.
- Herrera-Hernández, E. C., Coronado, M., & Hernández-Coronado, H. (2013). Fractal continuum model for tracer transport in a porous medium. *Physical Review E*, 88(6), 063004.
- Herrera-Hernández, E. C., & Coronado, M. (2015). Parameter Estimation in a Model for Tracer Transport in One-Dimensional Fractals. In *Selected Topics of Computational and Experimental Fluid Mechanics* (pp. 239-252). Springer International Publishing.
- Hornung, U. (Ed.). (2012). *Homogenization and porous media* (Vol. 6). Springer Science & Business Media.
- Janicki, M., De Mey, G., & Napieralski, A. (2002). Application of Green's functions for analysis of transient thermal states in electronic circuits. *Microelectronics Journal*, 33(9), 733-738.
- Jiménez-Islas, H., López-Isunza, F., & Ochoa-Tapia, J. A. (1999). Natural convection in a cylindrical porous cavity with internal heat source: a numerical study with Brinkman-extended Darcy model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(22), 4185-4195.
- Julian, H. E., Boggs, J. M., Zheng, C., & Feehley, C. E. (2001). Numerical simulation of a natural gradient tracer experiment for the natural attenuation study: Flow and physical transport. *Ground Water*, 39(4), 534-545.
- Kazemi, H. (1969). Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution. *Society of petroleum engineers Journal*, 9(04), 451-462.
- Kazemi, H., Merrill Jr, L. S., Porterfield, K. L., & Zeman, P. R. (1976). Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 16(06), 317-326.
- Keller, T. (1974). *U.S. Patent No. 3,856,468*. Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office.
- Kesten, A. S. (1969). An integral equation method for evaluating the effects of film and pore diffusion of heat and mass on reaction rates in porous catalyst particles. *AIChE Journal*, 15(1), 128-131.

Khaledialidusti, R., Kleppe, J., & Skrettingland, K. (2015). Numerical Interpretation of Single Well Chemical Tracer (SWCT) Tests to Determine Residual Oil Saturation in Snorre Reservoir. In *EUROPEC 2015*. Society of Petroleum Engineers.

Lunati, I., & Jenny, P. (2006). Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, 216(2), 616-636.

Mukkavilli, S., Tavlarides, L. L., & Wittmann, C. V. (1987). Integral method of analysis for chemical reaction in a nonisothermal finite cylindrical catalyst pellet-I. Dirichlet problem. *Chemical Engineering Science*, 42(1), 27-33.

Naji, H. S. A. (2016). *Finite difference and control-volume finite element simulation of naturally fractured reservoirs* (Doctoral dissertation, Colorado School of Mines).

Onyejekwe, O. O. (2002). Heat conduction in composite media: a boundary integral approach. *Computers & chemical engineering*, 26(11), 1621-1632.

Pan, E. (1997). Static Green's functions in multilayered half spaces. *Applied Mathematical Modelling*, 21(8), 509-521.

Reimus, P., Pohll, G., Mihevc, T., Chapman, J., Haga, M., Lyles, B., & Sanders, P. (2003). Testing and parameterizing a conceptual model for solute transport in a fractured granite using multiple tracers in a forced-gradient test. *Water Resources Research*, 39(12).

Sabag, J. R. (2008). PRUEBAS DE TRAZADORES EN LA RECUPERACIÓN DE HIDROCARBUROS.

Sahimi, M. (2011). *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. John Wiley & Sons.

Seifert, D., & Engesgaard, P. (2007). Use of tracer tests to investigate changes in flow and transport properties due to bioclogging of porous media. *Journal of contaminant hydrology*, 93(1), 58-71.

Schaffer, M., Maier, F., Licha, T., & Sauter, M. (2013). A new generation of tracers for the characterization of interfacial areas during supercritical carbon dioxide injections into deep saline aquifers: Kinetic interface-sensitive tracers (KIS tracer). *International Journal of Greenhouse Gas Control*, 14, 200-208.

Taigbenu, A., & Liggett, J. A. (1986). An Integral Solution for the Diffusion-Advection Equation. *Water Resources Research*, 22(8), 1237-1246.

Taigbenu, A. E., & Onyejekwe, O. O. (1999). Green's function-based integral approaches to nonlinear transient boundary-value problems (II). *Applied Mathematical Modelling*, 23(3), 241-253.

Tong, F., Niemi, A., Yang, Z., Fagerlund, F., Licha, T., & Sauter, M. (2013). A Numerical Model of Tracer Transport in a Non-isothermal Two-Phase Flow System for CO_2 Geological Storage Characterization. *Transport in Porous Media*, 98(1), 173-192.

Valdés-Parada, F. J., Alvarez-Ramírez, J., & Ochoa-Tapia, J. A. (2007). Análisis de problemas de transporte de masa y reacción mediante funciones de Green. *Revista mexicana de ingeniería química*, 6(3), 283-294.

Valdes-Parada, F. J., Sales-Cruz, M., Ochoa-Tapia, J. A., & Alvarez-Ramirez, J. (2008). On Green's function methods to solve nonlinear reaction-diffusion systems. *Computers & Chemical Engineering*, 32(3), 503-511.

Valdes-Parada, F. J., Sales-Cruz, A. M., Ochoa-Tapia, J. A., & Alvarez-Ramirez, J. (2008). An integral equation formulation for solving reaction-diffusion-convection boundary-value problems. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 6(1).

Wu, Y. S., & Pruess, K. (2000). Numerical simulation of non-isothermal multiphase tracer transport in heterogeneous fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 23(7), 699-723.

Wang, Q., & Zhan, H. (2015). On different numerical inverse Laplace methods for solute transport problems. *Advances in Water Resources*, 75, 80-92.

Wu, Y. S., & Pruess, K. (2000). Numerical simulation of non-isothermal multiphase tracer transport in heterogeneous fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 23(7), 699-723.

Zhu, Y., Zhan, H., & Jin, M. (2016). Analytical solutions of solute transport in a fracture-matrix system with different reaction rates for fracture and matrix. *Journal of Hydrology*.